UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

INCIDENCIA DE LAS CREENCIAS, EN EL USO DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN ESTUDIANTES DE ECONOMÍA Y ADMINISTRACIÓN DE EMPRESAS DE LA UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

AUTOR: SIGIFREDO CHAMORRO PANTOJA

TRABAJO ESPECIAL DE MAESTRÍA

PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

MEDELLÍN,

2014

INCIDENCIA DE LAS CREENCIAS, EN EL USO DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN ESTUDIANTES DE ECONOMÍA Y ADMINISTRACIÓN DE EMPRESAS DE LA UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

AUTOR: SIGIFREDO CHAMORRO PANTOJA

TRABAJO DE GRADO DE MAESTRIA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGISTER EN EDUCACION MATEMATICA

DIRIGIDA POR

Prof. JAVIER SANTOS SUÁREZ ALFONZO

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
MEDELLÍN,
OCTUBRE 2015

La gratitud es una virtud
que fortalece la condición humana,
ennoblece a quien agradece,
como a quien acepta el reconocimiento
de ser agradecido.

Este trabajo ha sido escrito
con el valioso apoyo, enseñanzas
y orientaciones de mis profesores
y con el entusiasmo de los
estudiantes.

Con ellos compartí la aventura
de alcanzar este noble objetivo profesional
y aprendí la importancia de perseverar
en mi deseo de superación, sin
detrimento de mis obligaciones laborales.

SIGIFREDO CHAMORRO PANTOJA

Dedicado con profundo afecto a

A Zoila, Paola hermanos y

Sobrinos

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad de Medellín.

A todos los Profesores de la Universidad de Medellín, a los Tutores de cursos complementarios de la maestría, quienes se desplazaron desde otros sitios nacionales o extranjeros, para enriquecernos con orientaciones muy valiosas.

A los compañeros, profesores(as) Silvia Morales, Diana Londoño, Maribel Mena, Sebastián Mena, Diego Milla, por su apoyo amigable y acogedor.

Al Profesor José Alberto Rúa, Jefe del Departamento de Ciencias Básicas, a su secretaria Aida Jaramillo.

A la profesora Ana Celi Tamayo Acevedo, Coordinadora de la Maestría y al asesor de mi trabajo de grado, el Profesor Javier Santos Suárez Alfonzo.

A todos los demás compañeros de la primera cohorte, por compartir sus experiencias de trabajos de grado que fueron muy enriquecedoras.

A la familia Santamaría Torres, quienes me brindaron hospitalidad y un ambiente familiar agradable durante el tiempo de estudio en su hogar.

A Ángela Giraldo y familia por su amistad sincera.

A Daniela García por su valiosa colaboración en la digitación de este documento.

TABLA DE CONTENIDO

Pág.

LISTA DE FIGURAS

Pág.

LISTA DE TABLAS

Pág.

LISTA DE GRAFICAS

Pág.

INCIDENCIA DE LAS CREENCIAS, EN EL USO DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN ESTUDIANTES DE ECONOMÍA Y ADMINISTRACIÓN DE EMPRESAS DE LA UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

RESUMEN

Son varias las creencias en el uso del concepto de función matemática. En esta investigación se estudian los antecedentes, avances, concepciones, creencias y dificultades en torno a este concepto, y se hace un recorrido de su evolución histórica. Se realiza un análisis de algunos obstáculos epistemológicos entorno a este concepto, partiendo de algunas investigaciones que han trabajado en torno a la temática en cuestión. Desde esta perspectiva se toma como muestra un grupo de estudiantes de las carreras económico administrativas de la Universidad de Medellín correspondiente al semestre lectivo 2012-2 y se les aplica un cuestionario, a partir de sus respuestas, estas son analizadas para establecer así la incidencia de sus concepciones y creencias, en el uso del concepto de función en este grupo de estudiantes. Así mismo, y a partir de las respuestas obtenidas desde el instrumento, se plantea la relación de este concepto con la enseñanza y el aprendizaje, haciendo uso de los registros de representación semiótica como elementos de relevancia para una mejor comprensión de estos temas.

Palabras Claves: Creencias, Concepciones, Función Matemática, Epistemología, Semiótica.

INTRODUCCIÓN

Cada época tiene sus exigencias, y el signo de la nuestra busca la eficacia. El desarrollo técnico y científico de un país necesita servirse de generaciones bien preparadas. El número de expertos, especialistas, peritos, ingenieros, matemáticos, etc., que una sociedad desarrollada precisa, va en aumento progresivo y dentro de las disciplinas formativas, adquieren cada día una importancia cada vez mayor el estudio de la Matemática, por lo que el mejoramiento de su enseñanza tiene un valor positivo y de urgencia.

La matemática es, por excelencia, una ciencia que contribuye al desarrollo del pensamiento lógico, al fortalecimiento de competencias propositivas, interpretativas y argumentativas. No es una ciencia natural sino una ciencia rigurosa sobre el pensar. Suena extraño, pero es una especie de filosofía exacta que vuelve concreto el ideal filosófico de deducir desde los principios. Con toda su autonomía, arroja también luz sobre el mundo natural, pues hace posible filosofar con precisión sobre sus fenómenos.

A lo largo de la historia, la matemática ha estado vinculada a las artes, tales como la arquitectura y la ingeniería, al igual que las ciencias naturales. Es una herramienta clave en el desarrollo científico y tecnológico de la sociedad. La didáctica de la matemática supone un problema complejo que implica cierto número de dificultades. La didáctica científica no puede considerarse unilateralmente, ni debe seguir métodos o procedimientos que la limiten, ha de ser algo más realizado y estructurado, tanto lógica como psicológicamente, para un trabajo efectivo.

En esta investigación acción, se hace una revisión comprensiva de los conocimientos actuales acerca de los modos en los cuales un grupo estudiantes de la Universidad de Medellín, en las carreras económico administrativas del periodo lectivo 2012-2 desarrollan el concepto matemático de función, pensando en que estos aportes sirvan a estudiantes, profesores y todos aquellos interesados en el tema.

En estos cuatro capítulos en lo que se ha estructurado esta investigación, se trata el problema de la formación general del concepto, se aborda la dificultad, la predisposición, las creencias de los estudiantes cuando se enfrentan a la construcción del concepto de función, el análisis de representaciones como sistemas simbólicos articulados, y un estudio concreto de cómo abordan el concepto de función.

En el capítulo 1, se realiza el planteamiento del problema y se contextualiza aspectos de relevancia para el desarrollo de la investigación, planteándonos un objetivo general y tres objetivos específicos que van articulado al título del trabajo, así mismo una pregunta problematizadora que sirve de carta de navegación para la construcción de los capítulos siguientes, que permiten adoptar una metodología de investigación de tipo mixta, apoyada fuertemente en un cuestionario aplicado al grupo de estudiantes mencionados anteriormente.

En el capítulo 2, se estudia la evolución del concepto de función a lo largo de la historia, vista desde varias civilizaciones, suministrando una perspectiva de los diferentes obstáculos epistemológicos alrededor del concepto de función. Por otro lado se abordan aspectos relacionados con el uso de los distintos registros de representación semiótica, así como también un análisis de contenido y valoración de textos, desde un enfoque semiótico.

En el capítulo 3 se realiza la recogida del dato y el análisis de resultados que arrojaron las respuestas al cuestionario aplicado a los estudiantes que hacen parte de la muestra. Con la información recolectada se hace uso de una estadística descriptiva para el análisis de estos resultados, todo desde una mirada cuantitativa y cualitativa. Adicionalmente se realiza el análisis de contenido de los libros de texto de Cálculo Diferencial, que se sugieren a los estudiantes que hacen parte de la población, el cual consiste de un texto guía y dos textos de consulta o referencia. El análisis exhaustivo de esta información conduce a un sistema de categoría que permite realizar una aproximación de la muestra, en términos del tipo de creencias que manejan estos estudiantes que hacen parte de este estudio.

El último capítulo se da algunas conclusiones que surgieron de la investigación, las cuales se enumeran de acuerdo a los distintos instrumentos de recolección. Adicionalmente se dan recomendaciones y sugerencias que pueden ser tomadas en cuenta para una oportunidad de mejora, para que los estudiantes realicen una apropiación lo más acertada al concepto de función matemática, haciendo uso de los distintos registros de representación semiótica, así como la conversión de dichos registros.

CAPÍTULO 1: CONTEXTUALIZACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

En este primer capítulo, presentamos una contextualización de la investigación realizada, mostrando algunos aspectos que dan claridad del motivo de realizar este estudio. Se presentan los elementos que permiten la construcción de las bases que soportan y dan origen a los capítulos siguientes.

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Las creencias de los estudiantes en torno al concepto de función no solo se modelan en el ámbito escolar, sino también en otros espacios o medios de socialización, en los que se comparte una visión de la función, por ejemplo en la familia, en los medios de comunicación, en el deporte, en la empresa privada etc.

El estudio de la función como tal, no es simplemente una tarea matemática, es una importante herramienta para pensar, el espacio para crear un ambiente de aprendizaje, la oportunidad para promover sujetos autónomos, creativos, críticos y propositivos. La noción de función matemática está catalogada como la herramienta más importante en el desarrollo del análisis matemático. Se contempla hoy como tema de estudio fundamental en todas las áreas del conocimiento que requieren de su aplicación, no solo como lectura e interpretación de gráficos, sino también se hace necesario determinar aproximaciones de como varían ciertas magnitudes que dependen de otras. Así, las funciones se consideran como las herramientas principales en la descripción matemática del mundo real.

En el presente trabajo se realiza un estudio sobre las creencias y concepciones que poseen unos grupos de estudiantes de la Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas de la Universidad de Medellín, en el período lectivo 2012-2, acerca del concepto de función matemática y su utilidad dentro del contexto de las diferentes carreras que hacen parte de esta facultad.

Dado que resulta evidente que el progreso de los conocimientos matemáticos, éste va acompañado por el avance y desarrollo de la investigación matemática por una parte y por otra, de las estrategias didácticas en la que se apoyan los docentes de matemática, para la transferencia de ese conocimiento, se puede tomar como un punto de partida para tales estrategias los sistemas semióticos. En la matemática las representaciones semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación, sino que también son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática. El problema de la relación entre actividad semiótica y actividad conceptual será abordado desde puntos de vista diferentes, como una forma de aproximación a la comprensión de este concepto por parte de estos grupos de estudiantes, de tal manera de conocer y divulgar como construye el concepto de función hasta llegar a su apropiación, a la utilidad, y relevancia dentro de su disciplina, como parte integral de su formación como futuro profesional.

En la mayoría de textos escolares y universitarios que se aplican en nuestro medio, coinciden en abordar la noción de función de manera formal, distanciada del desarrollo histórico y epistemológico en los cuales el concepto de variabilidad y de cambio constituyen su fundamento. Dada tal situación y siguiendo a Escudero (1983), “el libro de texto está constituido por tres dimensiones: a) semántica, es decir su contenido; b) estructural – sintáctica, que hace referencia a su forma de organización y sistemas de símbolos c) programática, donde se tiene en cuenta su uso, propósito, objetivos etc”. La presencia del libro de texto como mediador en el aula va siempre unida a la labor profesional del profesorado.

La comprensión de textos es un fenómeno que está haciendo sometido a importantes variaciones. Para un mismo sujeto o un mismo lector la comprensión de un texto puede presentar diferencias considerables en cuanto a sus exigencias o sus logros. La posibilidad de un aprendizaje de la comprensión de textos es uno de los mayores problemas de la enseñanza. El propósito de la comprensión de textos no se limita a estudiar el problema hermenéutico de la interpretación de un texto, sino el problema cognitivo, que resulta primordial para la didáctica.

Al abordar las dificultades y las concepciones de los estudiantes de economía y administración de empresas de la universidad de Medellín, encontramos que en el aprendizaje de la función matemática, los estudiantes presentan serias dificultades en su comprensión y su utilización en diferentes contextos, es por ello la necesidad de realizar un estudio que permita detectar las diferentes relaciones cognitivas que subyacen en el estudiante, que permita una retroalimentación en la forma de como ellos conciben el concepto de función matemática y redireccionarla en beneficio de una mejor apropiación del concepto.

1.2 JUSTIFICACIÓN

Todo profesor de matemática debe tener un conocimiento aceptable de la historia, la evolución y organización del concepto de función. Así mismo, es importante que el estudiante capte la dimensión de conceptos matemáticos y en especial, el de función. La matemática es una materia idónea para ejercitarse en el arte de pensar y el concepto de función es transversal dentro de la disciplina, por ello resulta una herramienta útil para describir ciertos fenómenos del mundo real en términos matemáticos.

El ritmo de cambios del presente siglo modificó radicalmente los modos de pensar las ciencias, las artes y las tecnologías. Los cambios en la organización social y el crecimiento cuantitativo y cualitativo de la tecnología han repercutido en la educación matemática.

En los orígenes de nuestra civilización no existía una idea abstracta de variable. Los griegos trataron con problemas que tenían implícita la noción de función, pero no fueron capaces de reconocerla y menos aún de simbolizarla. Durante la edad media se estudiaron fenómenos naturales como el calor, la luz, el color, la densidad, la distancia y la velocidad media de un movimiento uniformemente acelerado. Las ideas se desarrollaron alrededor de cantidades variables independientes y dependientes, pero sin dar definiciones específicas. Así, la noción de función y su evolución, se dio asociada al cambio, en particular del movimiento. Una función se definía por medio de una descripción verbal de sus propiedades específicas, o mediante un gráfico, pero aún no se usaban fórmulas.

Hasta el siglo XVII, el álgebra estuvo subordinada a la geometría, pero a partir de ese momento el rol se invirtió y con ello, se dio un cambio sustancial en la historia de la matemática. Vietá (1540-1603) y luego Descartes emplearon el Algebra para resolver problemas de construcciones geométricas.

Quien también contribuyó a la creación de la idea de función fue Galileo (1564-1650), introduciendo los números en las representaciones gráficas y expresando las leyes del movimiento. Paralelamente con la llegada de la obra de Descartes (1596-1650) se produce un enorme avance. Este matemático, buscaba liberar la geometría del exceso de figuras, pero también buscaba darle sentido o significado al álgebra por medio de la geometría. Fue revolucionario al establecer que una curva se construye con solamente ofrecer una ecuación algebraica. Así es que Descartes fue quien desarrolló la idea de introducir el estudio de una función en forma analítica. El concepto de función ha venido evolucionando hasta nuestros días, con los aportes de Newton, Leibniz, Stuik, Euler, D´Alambert, Bernoulli, Fourier. Cauchy, Cantor, etc.

Conocer la génesis de los principales contenidos escolares puede convertirse en una importante herramienta didáctica que los docentes podemos utilizar creativamente en la búsqueda de aprendizajes cada vez más significativos. Es por todo lo anterior que una de las motivaciones de este estudio es generar una pedagogía activa y de carácter analítico que lleve a los estudiantes a la necesidad de darle una estructura lógica a sus procesos argumentativos.

Los procesos didácticos parten del lenguaje común y se van desarrollando con base en la depuración lingüística y en los preconceptos (en esta caso, creencias). Esta es la dinámica del descubrimiento de la estructura formal de las disciplinas de estudio. El maestro, motiva, orienta pero no reemplaza al estudiante en su camino para la construcción de sus saberes. Es importante que el estudiante capte la dimensión de conceptos matemáticos como el de función, así como su aplicación en diversas disciplinas como la biología, química, física, ingeniería, estadística, administración, finanzas entre otras.

La relación con el lenguaje común es una pauta importante para la codificación, la interpretación y la solución de problemas que impliquen alternativas matemáticas, puesto que los problemas son un instrumento valioso para desarrollar un pensamiento autónomo y crítico necesario para crear un ambiente de aprendizaje del concepto de función.

“Aprender a pensar” ha sido uno de los argumentos más repetidos a lo largo de la historia para justificar la necesidad de aprender la matemática, aunque no el único. Porque pensar es una de las actividades centrales de la persona, aunque el ser humano además de pensar también sea capaz de sentir, de creer, de amar, de jugar, de contemplar, de actuar. Aunque pensar no sea patrimonio exclusivo de ninguna ciencia, la matemática es una materia idónea para ejercitarse en el arte de pensar y para tratar de mejorarlo.

Según los planteamientos de Raymond Duval (2004), el reto de una investigación sobre la enseñanza de la matemática, no es solo saber cuáles contenidos enseñar y de qué manera introducirlos en clase, sino también analizar las razones estructurales de los problemas de comprensión con los cuales se enfrentan la mayoría de los estudiantes de todos los niveles de enseñanza. Este segundo reto es tan fundamental como el primero, en tanto que asume que la enseñanza de la matemática, ha de contribuir al desarrollo general de las capacidades de razonamiento, de análisis y visualización de todos los estudiantes.

Las funciones son fundamentales en el estudio del cálculo. El estudiante debe estar en capacidad de saber qué son las funciones, como se combinan y transforman, así como las formas en las cuales se pueden clasificar. Entonces las funciones son una herramienta para describir el mundo real en términos matemáticos.

Tomando como punto de partida todos los aspectos anteriores: evolución del concepto de función, las diferentes formas de representación y la pertinencia del concepto dentro de varias disciplinas, se busca lograr la combinación de cada uno de estos elementos, para indagar por una parte, el estado en que se encuentra un grupo de estudiantes de la facultad de ciencias económico-administrativas de la Universidad de Medellín, en lo que se refiere a la forma como estos construyen, internalizan y usan las concepciones y creencias para la formalización del concepto de función. Así mismo mostrar la relevancia e importancia que ellos les dan dentro de su formación como futuros profesionales.

1.3 OBJETIVOS

A continuación se muestra como se desarrolló esta investigación, para ello se plantea un objetivo general y tres objetivos específicos. Así mismo la pregunta de investigación que junto con los objetivos nos dan la carta de navegación de cómo se lleva a cabo la presente investigación.

1.3.1 OBJETIVO GENERAL

Analizar la incidencia de las creencias, en el uso del concepto de función en dos grupos de estudiantes del curso de cálculo diferencial en carreras de economía y administración de empresas de la Universidad de Medellín en el semestre lectivo 2012-2.

1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1.3.2.1 Indagar los preconceptos que tiene estos dos grupos de estudiantes sobre los conceptos de variable y función.

1.3.2.2 Reflexionar sobre las creencias que tiene los estudiantes sobre el uso de los conceptos de variable y función en la solución de problemas.

1.3.2.3 Mostrar la importancia del uso de los conceptos de variable y función para la solución de problemas en las carreras económico administrativas.

1.4 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

¿Cómo reorientar las creencias y concepciones del concepto de función, en estudiantes de economía y administración de empresas de la Universidad de Medellín, a fin de lograr el aprendizaje significativo de este concepto y contribuir en la mejora de la capacidad de soluciones de problemas propios de sus carreras?

1.5 POBLACIÓN Y MUESTRA

En esta investigación se realizó un estudio de casos, dada a una preocupación generalizada, debido el alto índice de deserción, repitencia que habitualmente se observa en estos grupos de los primeros semestres de la asignatura Cálculo Diferencial. Dentro de los distintos grupos de estudiantes del curso Cálculo Diferencial, para las carreras de Ciencias Económicas y Administrativas, en el semestre lectivo 2012-2, se consideraron dos grupos conformado por 56 estudiantes que hacen parte de la muestra considerada para la presente investigación. Estos dos grupos fueron seleccionados intencionalmente por su horario, disponibilidad del investigador y colaboración del docente del curso por abrir un espacio en su hora de clase para aplicar el instrumento, que consiste de un cuestionario, es decir se realiza el muestreo de conveniencia, la cual es una técnica de muestreo no probabilística.

Como el nombre lo indica, la muestra se determina por conveniencia. Los elementos se incluyen en la muestra sin que haya una probabilidad previamente especificada o conocida de que sean incluidos en la muestra. La investigación desarrollada en el campus de la Universidad de Medellín hace uso de estudiantes “voluntarios” para que constituyan lo que será la muestra objeto de estudio.

Estos dos grupos de estudiantes pertenecientes a diferentes carreras tales como: Contaduría Pública, Administración de Empresas, Administración de Empresas Turísticas, Negocios Internacionales, etc., son estudiantes que están realizando estudios y su mayoría han cursado a la fecha de esta investigación, dos semestres en la Universidad de Medellín. Algunos de ellos comparten su tiempo de actividades académicas con trabajos de medio tiempo y en otros casos trabajos ocasionales. El rango de edades varía desde 17 años hasta los 24 años aproximadamente, mucho de ellos aún en proceso de adaptación y de transición del bachillerato a la vida en el campus universitario.

Gran parte de la muestra seleccionada se corresponde con estudiantes que no poseen hábitos de estudios y que solo dedican pocas horas al trabajo independiente que requieren las distintas asignaturas que toman semestre tras semestre, así mismo su asistencia a cada uno de los programas de Permanencia con Calidad, tales como: Semilleros Académicos, Tutorías y Semilleros de Monitores, es baja en proporción con el número total de grupos de Calculo Diferencial.

1.6 METODOLOGÍA

La metodología utilizada en esta investigación, requiere una retrospectiva tanto histórica, como de los estudios relacionados con las concepciones, creencias y los obstáculos de carácter epistemológicos del concepto de función matemática, sin dejar a un lado los relacionados a aspectos fundamentales como los disciplinares.

Por estas razones, este trabajo de investigación por su objeto de estudio es una investigación de campo, enmarcada en un estudio de casos, ya que se busca en parte interpretar y dar un pequeño aporte a la solución de un problema de gran relevancia en matemática, que tiene que ver con la comprensión del concepto de función matemática en un grupo de estudiantes de las Carreras Económico Administrativas de la Universidad de Medellín y que tomaron el curso de Cálculo Diferencial en el periodo lectivo 2011-2, la intención es que los resultados puedan ser usados, replicados y escalados por los docentes posteriormente, en aras de mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje alrededor de esta temática.

Según el nivel de medición, esta investigación se enmarca en una investigación de tipo mixta, es decir, tiene elementos de la investigación de carácter cuantitativo y cualitativo al mismo tiempo.
Tiene elementos de una investigación cuantitativa, ya que proporciona conexión fundamental entre la observación empírica y la expresión matemática de las relaciones cuantitativas. Haremos uso de una estadística descriptiva fundamentada en histogramas de frecuencias para dar explicación lo más objetivamente posible a algunos resultados obtenidos en el cuestionario, aplicada a la muestra seleccionada.

Por otro lado tiene rasgos de la investigación cualitativa, dado que la recolección de datos es, analizando e interpretando los datos mediante la observación de lo que las personas hacen y dicen en el instrumento diseñado para la recolección de tal información. La investigación cualitativa en este trabajo se refiere a los significados, las definiciones, las características, símbolos, metáforas y descripción alrededor del concepto de función matemática.

La investigación cualitativa es mucho más subjetiva dado que el instrumento para la recolección de la información tiene una naturaleza abierta, es decir, es de tipo exploratoria y de composición abierta. La investigación cualitativa puede ser más clasificada en esta investigación, dado que tiene presente tres enfoque, los cuales son: Fenomenológico, Etnográfico y Estudio de casos.

I. **Fenomenología:** Una forma de investigación en el que el investigador trata de comprender cómo una o más estudiantes experimentan, conciben e interpreta el concepto de función matemática

II. **Etnografía:** Se centra en la descripción de la cultura matemática de un grupo de estudiantes, acerca de sus creencias, concepciones compartidas o no, los valores, normas, prácticas lingüísticas, y los distintos registros de representación semiótica que poseen y la forma de usarlos.

III. **Estudio de caso:** Es una forma de investigación cualitativa que se centra en proporcionar una descripción detallada de uno o más casos, atendiendo aspectos históricos, concepciones, creencias y de orden epistemológicos.

IV.

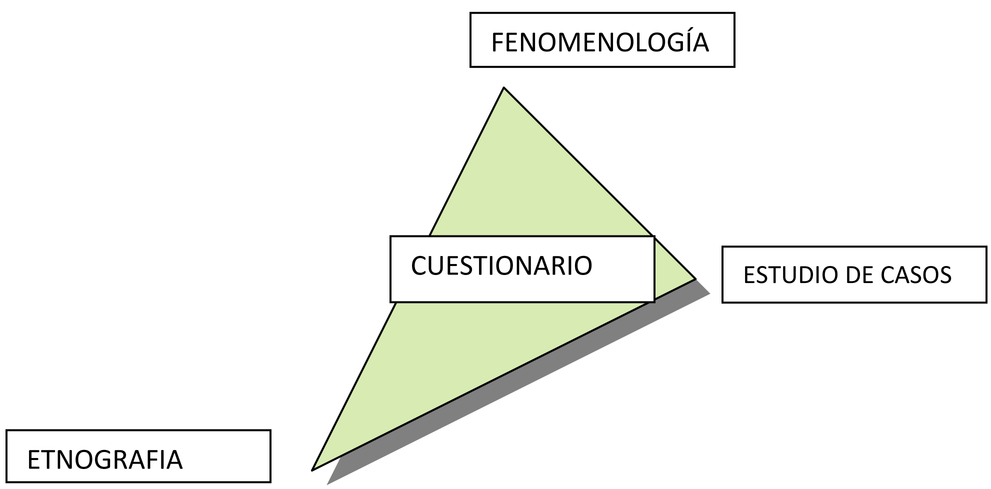


Fig. 1.1: Enfoque Cualitativo del Cuestionario

En la figura 1.1, se muestra los tres enfoques del instrumento de medición (cuestionario), que permite desde su diseño, ejecución y aplicación la recolección de los datos, en una forma de triangulación, que nos facilitarán en cierto sentido un procesamiento de la información que obedece a los aspectos que se desarrollan en el capítulo 2, de tal manera de poder cumplir con los tres objetivos específicos que nos proponemos en esta investigación, haciéndolo de manera sistemática pasando primero por la indagación, luego la reflexión y posteriormente el poder mostrar la importancia del concepto de función matemática entre los grupos de estudiantes de la Universidad de Medellín y en particular en los de las carreras económico – administrativas.

CAPITULO 2: MARCO TEÓRICO

Iniciamos este capítulo, apoyándonos en los planteamientos e ideas formulada por Vásquez, Rey y Boubée (2008), acerca de la evolución del concepto de función. Ellos hacen referencia, a que el estudio de los procesos históricos en el desarrollo de los conceptos matemáticos nos permite conocer como surgen y se aplican métodos, ideas, conceptos y teorías sobre esta ciencia, de allí que siguiendo sus aportes, realizamos una revisión cronográfica de cómo diferentes culturas se han aproximado al concepto de función, de tal manera que esta breve reseña histórica que ellos realizan, pueda ser utilizada como "una herramienta pedagógica, para mostrar los caminos recorridos por el hombre con el fin de mejorar las posibilidades y el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto de función"

Adicionalmente señalan:

> La comprensión de una teoría matemática no puede ser completa sí se desconocen sus orígenes. Ir a ellos y ver como esa teoría ha influido en el conocimiento son pilares fundamentales para el educador y para el investigador en la medida que constituyen una herramienta pedagógica de gran valor al mostrar los caminos recorridos por la ciencia, condición necesaria para encontrar alternativas, proponer nuevos alcances y mejorar posibilidades (Vásquez, Rey y Boubée 2008).

2.1 EVOLUCIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN A TRAVÉS DE LA HISTORIA

Esta revisión bibliográfica sigue los lineamientos propuestos por Yousch Kevitch (1976), citado por Vásquez, Rey y Boubée (2008), Kevitch quien organiza la evolución del concepto de función, distinguiendo tres periodos: Época antigua, Edad media y Período Moderno.

2.1.1 EPOCA ANTIGUA

Se refiere a la matemática prehelénica y abarca a las antiguas civilizaciones de Egipto, Mesopotamia, China e India. Estas culturas comienzan a aproximarse implícitamente al concepto de función mediante la acción de corresponder a la relación entre un conjunto dado de objetos y una secuencia de números para contar. Esto se encuentra en los restos óseos, donde los cavernícolas dejaron huellas que parecen tienen cierta relación con la actividad de contar. Puede decirse, entonces, que la noción de función tiene sus raíces en el desarrollo del concepto de número. Básicamente, las cuatro operaciones aritméticas elementales son funciones de dos variables.

> En las tablas numéricas babilónicas (2000 a.C. – 500 a.C.) se presentaba el resultado de multiplicaciones y divisiones de cuadrados, cubos y raíces cuadradas y cúbicas. Además, se han encontrado tablas con fórmulas de cálculos tan llamativas como la suma de n términos de una progresión geométrica, o la de los números pitagóricos, o las que muestran la utilización de reglas de tres, simples y compuestas. (Vásquez, Rey y Boubée 2009).

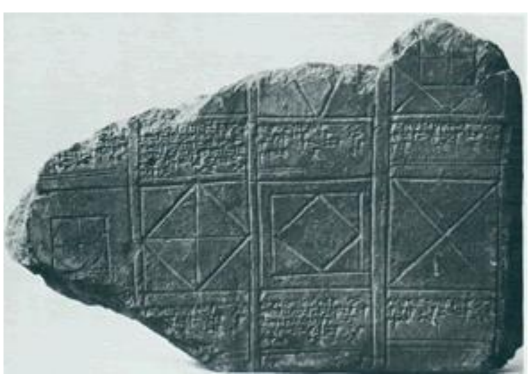


Figura 2.1 Tablilla con motivos geométrico

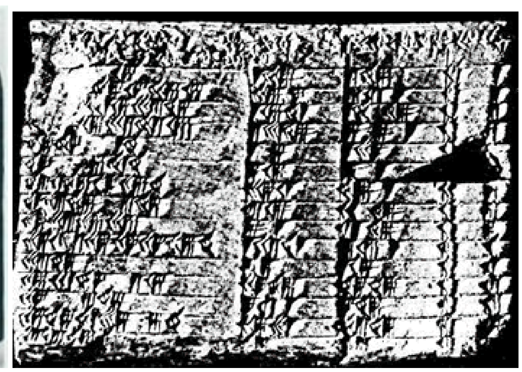


Figura 2.2 TablillaPlimpton con las ternas pitagóricas.

Fuente: Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática N° 16. Pág. 143

El cálculo en Caldea, Asiria y Babilonia (5000 a.C. – 500 a.C.), ha sido recientemente puesto de manifiesto en su enorme contribución al acervo matemático de la humanidad. En tablillas descifradas hace muy poco tiempo (1930), figuran operaciones algebraicas con ecuaciones de segundo grado y tablas de potencias, que requieren un dominio de la matemática elemental. Sin embargo, esto no supone que los caldeos tuvieran toda una concepción abstracta de las matemáticas.

Los babilonios inventaron una numeración sexagesimal, dividieron la circunferencia en 360 grados, el año en doce meses, la semana en siete días y el día en 24 horas, subdivididas en 60 minutos y éstos en 60 segundos. Para ello, estudiaron los movimientos del sol, hicieron observaciones directas de fenómenos y establecieron relaciones aritméticas que les permitieron hacer predicciones. Cultivaron especialmente las matemáticas, la gramática, la astronomía mezclada con astrología.

> Los babilonios tenían un manejo algebraico muy desarrollado, caracterizado por la sustitución, el cambio de variables y hasta el uso de la ley exponencial. Conocían la fórmula de la ecuación de segundo grado y hasta reducían ecuaciones de grado superior, con cambios de variables incluyendo las de segundo grado. (Vásquez, Rey y Boubée 2009).

Las investigaciones y registros encontrados, muestran que los babilonios no manejaban el concepto de función, pero si una noción implícita en las tablillas astronómicas, ya que estas eran el resultado de observaciones directas de fenómenos en correspondencia por una relación aritmética, un ejemplo de ello es, los períodos de visibilidad de un planeta y la distancia angular de este planeta al Sol.

Los egipcios (2800 a.C.-2250 a.C.) llegaron a conocer la suma y la resta aplicándolas para multiplicar y dividir. Calcularon el área y el volumen de algunas figuras y fue difundido el empleo de las proporciones a través de fraccionarios. En realidad, usaron procedimientos de cálculos simples, púes su interés fue aplicar lo esencial para realizar sus labores productivas, mercantiles y constructivas. Con sus observaciones y cálculos astronómicos, los egipcios crearon el calendario lunar, de 365 días, para las diferentes fiestas religiosas y ritos; pero como tenía cinco minutos menos que el calendario solar, hicieron un calendario agrícola.

El álgebra en el antiguo Egipto (5000 a.C. – 500 a.C.), maravilloso pueblo de faraones y pirámides, señala los primeros vestigios del desarrollo de una ciencia matemática. Sus exigencias vitales estaban sujetas a las periódicas inundaciones del río Nilo, circunstancias que los llevaron a perfeccionar la aritmética y la geometría. En el papiro de Rhind debido al escriba Ahmes (1650 a.C.), el más valioso y antiguo documento que existe, se presentan operaciones entre múltiplos, problemas, soluciones de ecuaciones de segundo grado.

El conocimiento matemático en la antigua India, los llevó a proponer nuevos acercamientos al álgebra y a la trigonometría. Ellos crearon el sistema decimal (base 10), que usamos actualmente, los números que usamos son de procedencia India, aunque son llamados números arábigos por que se conocieron en Europa a través de los árabes.

En este sentido, se puede afirmar que en la antigüedad se hicieron estudios sobre casos concretos relativos a la astronomía, sin limitarse a la simple tabulación de datos empíricos; se emplearon interpolaciones y extrapolaciones en la búsqueda de regularidades y proporciones, pero sin evidencia de algún tipo de generalización.

Más tarde, durante la época de la cultura helénica (500 a.C. – 500 d.C.), aparecen cambios en los contenidos que exigen mayor esfuerzo y que no se podían resolver con la escuadra, la regla y el compás. Por ejemplo, la cuadratura del círculo (Anaxágoras), la duplicación del cubo (Mencemo) y la generación de diferentes curvas. Los griegos también se ocuparon del estudio de problemas que tenían implícita la noción de función, establecieron relaciones entre magnitudes geométricas variables de la misma naturaleza; es decir, relacionaban áreas con áreas, volúmenes con volúmenes, longitudes con longitudes, y con éstas se hicieron cálculos. Hallaron centros de gravedad, desarrollaron tablas de senos que eran similares a las modernas tablas de seno y coseno, marcando el comienzo de la trigonometría.

A continuación en la siguiente tabla se muestra algunos de los aportes más importantes a los antecedentes al concepto de función por parte de la cultura griega. Entre otros griegos notables están:

Personajes griegos que hicieron los primeros antecedentes al concepto de función	**Aporte realizado**
PITAGORAS (583 – 500 a. C.)	Fue el primero en colocar a la base de especulaciones filosóficas, los conceptos fundamentales de la matemática. Hizo del número el principio universal por excelencia, su teorema de Pitágoras es un enorme aporte a la trigonometría.
CLAUDIO PTOLOMEO (100-175 d. C.)	Su sistema geocéntrico dominó la astronomía durante catorce siglos, hasta la aparición de Copérnico. Aunque es más conocido por estos trabajos, fue uno de los fundadores de la trigonometría. Su obra principal, el Almagesto, en que se abordan cuestiones científicas, se utilizó en las universidades hasta el siglo XVIII.
EUCLIDES (365 – 275 a.C.).	de demostración geométrica. La geometría construida por Euclides, se mantuvo incólume, hasta el siglo XIX.

Tabla 2.1: Antecedentes del concepto de función por parte de la cultura griega.

A modo de síntesis, se puede decir, que estos estudios sobre las relaciones entre magnitudes geométricas variables, si bien no respondían explícitamente al concepto de función, pueden ser considerados como los primeros antecedentes aportados por la cultura helénica.

2.1.2 EDAD MEDIA

La edad media comienza con la caída de Roma en el año 476, y finaliza en el año 1453, con la caída de Constantinopla. Los árabes, además de recuperar un buen número de obras griegas van a proporcionar a occidente un gran tesoro que desarrollará de forma increíble como lo es la aritmética, sentando las bases de una nueva rama de las matemáticas conocida como álgebra.

Durante la edad media, las ideas se desarrollaron alrededor de cantidades variables independientes y dependientes, pero sin dar definiciones específicas. Se le dio prevalencia al estudio de los fenómenos naturales como calor, luz, color, densidad, distancia y velocidad. La evolución de la noción de función, se asocia al estudio del cambio, en particular del movimiento. Así, la función se definía por una descripción verbal de sus propiedades específicas, o mediante un gráfico, pero aún no se usaban fórmulas.

A Nicolás Oresme (1323-1382), se le atribuyen las primeras representaciones geométricas de las cosas que varían. Trasladó al plano lo que hasta entonces habían hecho los geógrafos sobre la esfera, manteniendo los nombres de longitud y latitud. Utilizaba una línea horizontal para representar el tiempo (longitud) en la representación gráfica de cambio de velocidad a través del tiempo, y a las velocidades en los diferentes instantes, las ubicaba en las líneas verticales (latitud), análogamente a las llamadas en la actualidad abscisa y ordenada, respectivamente. Su objetivo era el de representar con una figura las intensidades de una cualidad que depende de otra. Aquí es importante anotar que, similar al pensamiento griego, para Oresme la noción de número y magnitud fueron diferentes, la primera la asociaba al conjunto de unidades, mientras que la segunda, se refería a lo medible. “Toda cosa medible, excepto los números, se puede imaginar como una forma de cantidad continua” (1327), afirmó Oresme.

Vásquez, Rey y Boubée 2008, resumen este periodo de la siguiente manera:

> Si bien durante la Edad Media se lograron algunos resultados de interés en Matemáticas, puede decirse que éstos no fueron de una gran trascendencia. La situación cambio durante el Renacimiento bajo la acción de las importantes transformaciones sociales, culturales y políticas asociadas a este período.

2.1.3 PERIODO MODERNO

En los inicios de esta época, que comienza a finales del siglo XVI, las funciones fueron equivalentes a expresiones analíticas. Kleiner (1989) citado por Vásquez, Rey y Boubée (2008) señala que desde 1450 a 1650 se produjeron sucesos fundamentales para el desarrollo del concepto de función, tales sucesos se enumeran a continuación:

1) La extensión del concepto de número al de números reales, e incluso al de números complejos (Bonbelli & Stifel).
2) La creación del álgebra simbólica (Vieta, Descartes).
3) El estudio del movimiento como un problema central de la ciencia (Kepler, Galileo).
4) La unión entre el Álgebra y la Geometría. (Fermat, Descartes)

Vásquez, Rey y Boubée (2008) señalan que un siglo después

> Hasta el siglo XVII, el álgebra estuvo subordinada a la geometría, pero a partir de ese momento el rol se invirtió y con ello se dio un cambio sustancial en la historia de las matemáticas. La dependencia del álgebra y la geometría, comenzó a invertirse cuando Vietá (1540-1603), y luego Descartes, emplearon el álgebra para resolver problemas de construcciones geométricas.

Quien también contribuyó a la creación de la idea de función fue Galileo (1564-1642). Al introducir lo numérico en las representaciones gráficas y expresar las leyes del movimiento a las que incorporó el lenguaje de la teoría de las proporciones, con lo cual mostró claramente que estaba tratando con variables y funciones.

Con la llegada de la obra de Descartes (1596-1650) se produce un enorme avance. Fue revolucionario al establecer:

- Que una curva se construye con solamente ofrecer una ecuación algebraica.
- Desarrolló la idea de introducir una función en forma analítica.

- Fue el primero en poner en claro que una ecuación en (x) y (y), es una forma de mostrar una dependencia entre cantidades variables.
- Propone nuevas curvas generales para construcciones mecánicas.
- Clasifica las curvas en “mecánicas” y “geométricas”.

Leibniz (1646-1716) fue el primer matemático en utilizar la palabra función en 1692 (Struik, 1969 citado por Vásquez, Rey y Boubée (2008)). En 1665, Newton utilizó la palabra ***fluent,*** para representar cualquier relación entre variables. Newton y Leibniz contribuyen de manera decisiva al desarrollo del concepto de función, al introducir el desarrollo de función en una serie de potencias. Hasta ese entonces la idea de función se restringía a las funciones analíticas, abarcando primeramente a las que se podía expresar mediante una ecuación algebraica y luego a las desarrolladas en series de potencias.

En siglo XVIII, aparece uno de los matemáticos más prolíficos de la historia: Euler, quien había sido precedido por una familia de matemáticos suizos realmente sorprendente, como los Bernoulli (Johan y Jacob). El concepto de variable, aplicada a objetos geométricos se sustituye por el concepto de función como una fórmula algebraica.

Euler define constante y cantidad variable y precisa la definición de función como una expresión analítica. Se enfrenta entonces al problema de que si a toda función le corresponde una curva también toda línea curva debería representarse por una función, en consecuencia, admite como funciones a las llamadas curvas mecánicas. Distingue luego funciones “continuas”, no en el mismo concepto actual, se refiere a aquellas que se representan por solo una ecuación, y llama “discontinuas” a las curvas mecánicas.

En el siglo XIX, después de los últimos trabajos de Euler referentes a funciones arbitrarias, Fourier hace grandes aportes acerca de series trigonométricas, que serán seguidos con trabajos acerca de números reales de Cauchy, Dedekin, Lobachevsky, Riemman y Dirichlet, entre otros. En cuanto a la representación, para simbolizar la función se emplea la expresión $f(x)$ o y . En las representaciones gráficas se emplean los ejes cartesianos, y aparecen los diagramas de Venn con fines didácticos.

Dirichlet (1805-1859) fue el primero en considerar la noción de función como una "correspondencia arbitraria" y restringió explícitamente a un intervalo, el dominio de una función. A partir de los trabajos de Dirichlet, el concepto de función adquiere un significado independiente del concepto de expresión analítica.

A finales del siglo XIX y primeras décadas del siglo XX aparece la estructuración sistemática y lógica de la teoría de conjuntos que se toma como base y fundamento de toda la matemática. La definición de función sigue evolucionado a través de la historia, con los desarrollos en el campo del análisis, álgebra abstracta y de la topología. En 1939 el grupo Bourbaki formuló la definición de función como un subconjunto especial de un producto cartesiano, considerada con frecuencia en la enseñanza de funciones hoy en día.

2.2. DESARROLLO EPISTEMOLÓGICO DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

Al incursionar en el desarrollo histórico y epistemológico de la noción de función se logran identificar distintas etapas en su evolución, de las que surge información relevante para comprender no solo las dificultades que tienen los estudiantes, sino para sugerir metodologías alternativas a las usuales en las que se aborda la noción desde las últimas concepciones. En este recorrido se destacan distintos estadios que han fortalecido su evolución y otros que se han considerado resistentes a su evolución y generalización; por tanto, pueden describirse como obstáculos epistemológicos (Ruiz, 1998). También es importante resaltar que en el mismo sentido en que evoluciona el concepto de función, se aprecian cambios en su forma de representación.

2.2.1 LA EPISTEMOLOGIA

La epistemología (del griego episteme, ·conocimiento" y logos "teoría"), es la doctrina de los fundamentos y métodos del conocimiento científico. Esta disciplina ha conocido un desarrollo extraordinario durante los siglos XIX y XX. La epistemología ha sido calificada como la filosofía de la acción, por su enorme influencia en el trabajo de expertos de las más variadas disciplinas, desde la biología a la informática, pasando por las llamadas ciencias sociales y la inteligencia artificial, entre otras. No obstante, como parte de la teoría del conocimiento o gnoseología, la epistemología tiene una larga historia que se remonta a la antigüedad griega.

Aristóteles coincidió con Platón en su consideración del conocimiento abstracto como superior a cualquier otro, pero postuló el empleo de un método diferente para alcanzarlo. Dado que casi todo conocimiento se deriva de la experiencia, este se obtiene bien directamente, abstrayendo los rasgos definitorios de una clase, o indirectamente, deduciendo nuevos hechos de los ya conocidos, de acuerdo con las reglas de la lógica. Para Aristóteles, "el conocimiento real es idéntico a su objeto" (330.a.C.).

Después de muchas siglos en el cual decae el interés por el conocimiento real, racional y científico, el filósofo escolástico Tomás de Aquino y otros pensadores de la Edad Media contribuyeron a restablecer la confianza en la razón y la experiencia, combinando los métodos racionales con la fe en un sistema unificado de creencias.

Desde el siglo XVI hasta finales del XIX la reflexión de la epistemología se centró en la cuestión de la utilidad de la razón frente a la percepción de los sentidos, como vía de conocimiento. Para los racionalistas, entre cuyos principales representantes se cuentan: Descartes, Spinoza y Leibniz, la fuente principal y la prueba final del conocimiento es el razonamiento deductivo basado en principios auto-evidentes, o axiomas. Para los empiristas, empezando por los filósofos ingleses, Francis Bacón y John Locke, la fuente principal y la prueba final del conocimiento es la percepción de los sentidos.

2.2.2 LA EPISTEMOLOGÍA EN EL SIGLO XX Y LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

A principios del siglo XX, los problemas epistemológicos fueron ampliamente discutidos, al respecto, surgieron diferentes escuelas que enfrentaron sus postulados. En aquellos momentos, se prestaba especial atención a la relación entre el acto de percibir algo, el objeto directamente percibido, y lo que puede decirse que se conoce como resultado de esa percepción. A lo largo de la centuria, se forjaron tres modelos básicos de interpretación de conocimiento científico: el empirismo lógico, el socio-historicismo humanista y el racionalismo crítico. El empirismo inductivo – bajo cánones identificados con el término positivismo se convierte en la más influyente interpretación del conocimiento científico, en clara reacción contra la reflexión especulativa, al propugnar el conocimiento riguroso, sometido a reglas de validación fundadas en la experiencia constatable.

Si los matemáticos se ocupan de la enseñanza de las matemáticas, deberían interesarse en conocer ¿Cómo funciona la mente humana? y, en particular, deberían observar ¿Cómo aprenden sus alumnos los conceptos matemáticos? El ejercicio de una docencia responsable demanda una respuesta científica a esta pregunta para poder responder a esta otra: ¿Cómo enseñar las matemáticas?

La primera de estas tres preguntas pertenece al dominio de la psicología cognitiva y las otras dos son eminentemente didácticas. No obstante las tres preguntas demandan un fundamento epistemológico de las relaciones y un enfoque que permita abordar los diferentes niveles de realidad del fenómeno didáctico. Es decir, la inteligibilidad del fenómeno se logra a partir de una posición epistemológica, explicita y militante, y de un enfoque transdisciplinario.

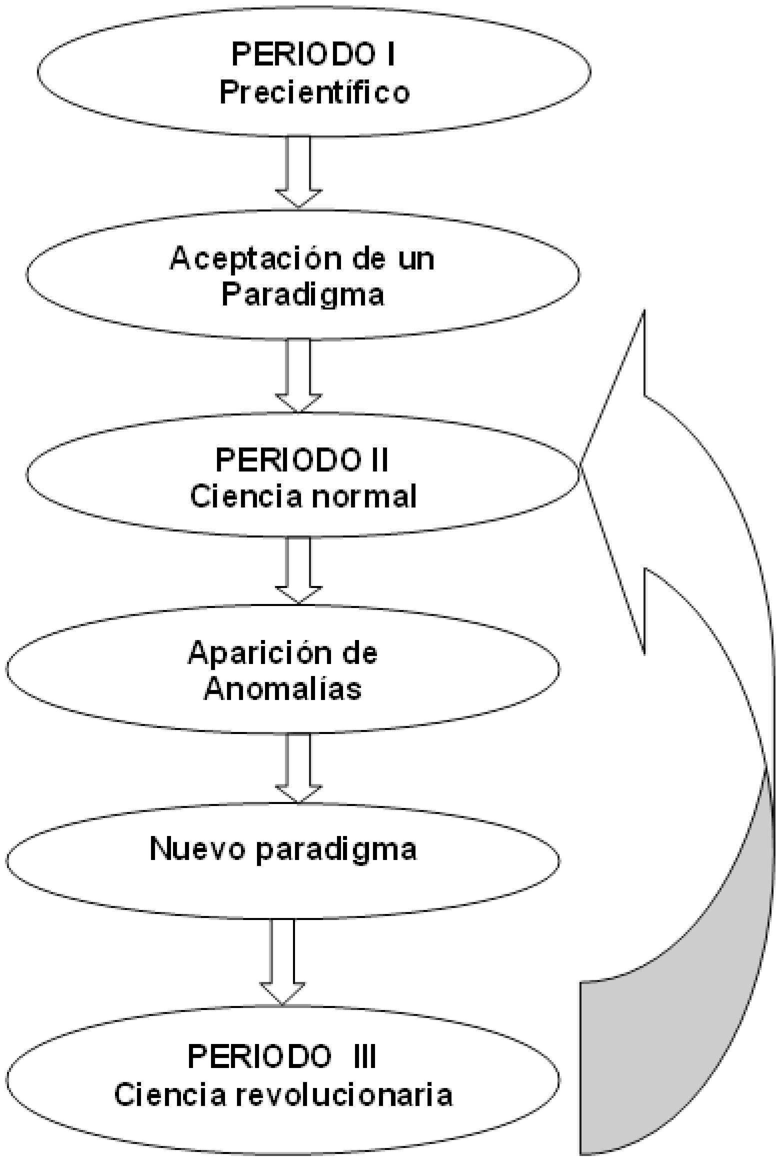
Si la realidad tiene diferentes niveles, entonces la transdisciplinariedad se interesa en la dinámica generada por la acción de estos diferentes niveles sobre el fenómeno didáctico. En sentido estricto la epistemología es una rama de la filosofía que, solo que en el siglo XX, se ha constituido en un campo disciplinario específico.

En sentido amplio la epistemología se ha entendido como el estudio del conocimiento humano. Lo que interesa es comprender el conocimiento del hombre en todas sus dimensiones y penetrar en su complejidad. Esto quiere decir, pensar en el hombre, no solo en su realidad científica, sino en sus actividades, en sus relaciones y en su vida total.

Estas dos maneras de entender la epistemología dan origen a dos grandes corrientes que, en su excelente artículo sobre "epistemología de las matemáticas y de la educación matemática" Sierpinska y Lerman (1996) llaman epistemologías del contexto de justificación y del contexto de descubrimiento. Aquí conviene detenerse un momento a fin de exponer brevemente los conceptos centrales de la "teoría de las revoluciones científicas". Thomas Kuhn tomó de Bachelard el concepto "Ruptura epistemológica" y lo incluyó en su obra "The estructure of scientific revolutions" (1962), su epistemología se ubica en el contexto del descubrimiento. Según Kuhn, ninguna observación es neutra y todos los juicios están condicionados por el paradigma vigente.

"Cuando los paradigmas entran, como deben, en un debate sobre la elección de un paradigma, su función, es necesariamente circular. Para argüir en la defensa de ese paradigma, cada grupo utiliza su propio paradigma" (Kuhn, 1991, pág. 120). Para este autor, la ciencia no se desarrolló por medio de la acumulación de descubrimientos o inventos individuales, sino que surge en un proceso de ruptura con lo anterior: Adicionalmente señala: "…las revoluciones científicas se consideran aquí como aquellos episodios de desarrollo no acumulativo en que un antiguo paradigma es reemplazado, completamente o en parte, por otro nuevo o incompatible" (Kuhn, 1994, pág. 140). Una vez que un nuevo paradigma se ha establecido, comienza de nuevo el ciclo, con un período de ciencia normal.

A continuación se muestra, en forma esquemática según lo planteado por Kuhn (1962), lo que él denomina ciclo de evolución de la ciencia.



Fuente (Kuhn): Figura 2.3. Ciclo de evolución de la ciencia.

2.2.3 ANÁLISIS EPISTEMOLÓGICO DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

Luisa Ruiz (1998), asocia a la evolución histórica de la noción de función, siete concepciones, fruto de las problemáticas abordadas en los distintos periodos históricos, las invariantes usuales y las distintas representaciones simbólicas usadas:

1) Identificación de regularidades

Desde la época prehelénica y durante varios siglos, se han asumido situaciones ligadas a los fenómenos naturales en cuyos estudios se incorporan magnitudes físicas que cambian. Se usan tablas para registrar medidas de cantidades, sobre las que se consiguen relaciones entre cantidades de magnitudes variables, que permiten identificar regularidades en fenómenos sujetos al cambio. <u>La invariante que se asocia a la caracterización de esta concepción es el establecimiento de regularidades entre las relaciones de causa y efecto</u>.

2) Razón o proporción

Desde la matemática Helénica, hasta los matemáticos como Oresme y Galileo, las proporciones se emplearon para establecer relaciones entre magnitudes variables del mismo tipo, pero posteriormente con la introducción de igualdades en el álgebra, nace la posibilidad de formular una relación de dependencia entre variables. Se asocian situaciones relacionadas con magnitudes físicas, en particular en el campo de la geometría y la astronomía. <u>Las invariantes que caracterizan esta concepción son las relaciones de conmensurabilidad entre magnitudes homogéneas.</u>

3) Gráfica (visión sintética)

Debido a que en el siglo XIV, no se disponía aún de un continuo numérico para representar el movimiento, Oresme utiliza la continuidad de los segmentos para representar los cambios de la intensidad de magnitudes cualitativas y así poderlos describir, comparar y analizar la dependencia. <u>Las invariantes asociadas a esta concepción son la proporcionalidad entre magnitudes y la relación de dependencia cualitativa representada por medio de una figura que describe la cantidad de una determinada cualidad en relación con otra de la cual depende</u>.

4) Curva (analítico-geométrica)

Esta concepción se da en situaciones que conectan problemas de la geometría y el álgebra (s. XVIII). Descartes estudia las ecuaciones a través del significado de la curva, mientras que Fermat estudia el comportamiento de estas y sus propiedades definidas por ecuaciones. Nace la geometría analítica y con ella una amplia gama de nuevas curvas. Se gesta la noción de dependencia entre dos cantidades variables.

En cuanto al método cartesiano, su autor no se refiere de ejes, abscisas, ni ordenada. Para la representación de las curvas, escoge una recta en posición horizontal, señala en ella un punto fijo O; luego toma puntos en la curva y a cada uno de estos puntos asocia otro en la línea horizontal y analiza cómo cambia la distancia entre los puntos correspondientes respecto al punto fijo O. de esta manera, la posición de los puntos de la curva quedaba especificada por los números de las longitudes de los dos segmentos determinados. Invariantes: cuando una ecuación contiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente, y el punto extremo de una de estas cantidades describe una línea recta o una línea curva.

5) Expresión Analítica

Descartes reduce áreas y volúmenes al manejo de segmentos obteniendo expresiones básicas del álgebra. Más tarde Euler habla de expresión analítica, y Lagrange la ampliará a toda expresión del cálculo. Esta concepción se da en situaciones propiamente matemáticas así como en situaciones externas a las matemáticas, como por ejemplo en problemas de astronomía y física relacionadas con el estudio del movimiento curvilíneo y las fuerzas que lo afectan. Este estudio continua con los trabajos mecanicistas y geométricos de Newton y Leibniz (s. XVII), en los inicios del cálculo infinitesimal y continua con los trabajos de Bernoulli, Lagrange y Euler (s. XVII-XVIII)

Representación analítica (Leibniz):

$$fx = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

Invariantes: se identifican las cantidades variables con las expresiones analíticas: una función de una cantidad es una expresión analítica compuesta de cualquier manera que sea, de esta cantidad y de números o cantidades constantes.

6) Correspondencia arbitraria: aplicación

La discusión del problema de la cuerda vibrante (s.XIX) crea la necesidad de una noción más general del concepto de función. Dirichlet (1805-1859) fue el primero en considerar la noción de función como una “correspondencia arbitraria” y restringió explícitamente a un intervalo, el dominio de una función. A partir de los trabajos de Dirichlet, el concepto de función adquiere un significado independiente del concepto de expresión analítica. En cuanto a la representación, para simbolizar la función se emplea la expresión $f(x)$ o y . En las representaciones gráficas se emplean los ejes cartesianos, y aparecen los diagramas de Venn con fines didácticos. Invariantes: Se llega a la noción de correspondencia arbitraria: si una variable y está relacionada con otra variable x, de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x.

7) Función como terna

En las primeras décadas del siglo XX, se llega a la determinación de una función como terna. Se llama función a la terna $f = (A, B, G)$, en donde A, B, G son conjuntos que verifican las condiciones siguientes:

i) G es un subconjunto del producto cartesiano A$\times B$

ii) Para todo $x\ \ en\, A,\ \ existe\, un\, y\ \ un\, solo\, y\, en\, B\ \ tal\, que\ (x, y)\ \ est\acute{a}\, en\, G.$

iii) La noción en mención se considera en cualquier dominio científico. En la representación se siguen empleando los ejes cartesianos y la notación empleada es:

$$f = (A, B, G) \text{ es una función} \leftrightarrow G \subset A \times B\ \ y\ \forall x \epsilon A, \exists\ y \epsilon B\ tal\ que\ (x, y) \epsilon G.$$
$$(x, y), (x, z) \epsilon G \rightarrow y = z$$

Invariantes: La definición y notación en mención.

En la siguiente tabla resumen y apoyados en Ruiz (1998), presentamos las siete concepciones, del concepto de función en los distintos periodos históricos, las invariantes usuales y las distintas representaciones simbólicas usadas:

Concepciones y Períodos Históricos	*Invariantes usuales*
1) Identificación de regularidades Época Prehelénica.	Establecimiento de regularidades entre las relaciones de causa y efecto.
2) Razón o proporción Época Helénica, hasta los matemáticos como Oresme y Galileo.	Relaciones de conmensurabilidad entre magnitudes homogéneas.
3) Gráfica (visión sintética) Siglo XIV.	Proporcionalidad entre magnitudes y la relación de dependencia cualitativa representada por medio de una figura que describe la cantidad de una determinada cualidad en relación con otra de la cual depende.
4) Curva (analítico-geométrica) Siglo XVIII.	Cuando una ecuación contiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente, y el punto extremo de una de estas cantidades describe una línea recta o una línea curva.
5) Expresión Analítica Siglo XVII y XVIII	Se identifican las cantidades variables con las expresiones analíticas: una función de una cantidad es una expresión analítica compuesta de cualquier manera que sea, de esta cantidad y de números o cantidades constantes.
6) Correspondencia arbitraria: aplicación Siglo XIX.	Se llega a la noción de correspondencia arbitraria: si una variable *y* está relacionada con otra variable x, de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x.
7) Función como terna Primeras décadas del siglo XX.	$f = (A, B, G)$ es una función $\leftrightarrow G \subset A \times B$ $y\ \forall x \epsilon A, \exists\ y \epsilon B\ tal\ que\ (x, y) \epsilon G.$ $(x, y), (x, z) \epsilon G \rightarrow y = z$

Tabla 2.2.3.1. Fuente Ruiz (1998). Siete concepciones, del concepto de función en distintos periodos históricos.

2.2.4 OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICO DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

Dentro de los obstáculos que se consideran de mayor incidencia en el desarrollo del concepto de función, según Ruiz (1998) se tiene los siguientes: Proporciones homogéneas, Disociación entre magnitudes y números, Concepción geométrica de las variables, Concepción algebraica y Concepción mecánica de una curva.

A continuación realizaremos una breve descripción de cada una de ellas, apoyados en lo realizado por Ruiz (1998).

2.2.4.1 Proporciones homogéneas.

Los griegos consideraban el cambio y el movimiento como algo externo a las matemáticas y las proporciones solamente fueron empleadas para relacionar magnitudes físicas y del mismo tipo, con las que ataban el concepto de variabilidad. La igualdad entonces, no tuvo cabida en estas razones, puesto que no estaban inmersas en la matemática, concepción que no permitió evidenciar la dependencia entre variables y se extendió hasta la época de Oresme, Newton y Leibniz.

2.2.4.2 Disociación entre magnitudes y números.

En el pensamiento griego los números eran objetos discretos mientras que las magnitudes eran continuas. Este aspecto condujo a que las leyes físicas no fueran vistas como leyes matemáticas. La dificultad se supera en el siglo XIX, cuando se extienden los conjuntos numéricos al de números reales y se asocia a cualquier cantidad de una magnitud una media numérica.

2.2.4.3 Concepción geométrica de las variables.

El álgebra geométrica que construyeron los griegos, en la que la suma y resta de segmentos correspondía a otro segmento, la multiplicación de dos segmentos *x*, *y* a un rectángulo de lados *x*, *y*;

el producto de tres segmentos a un paralelepípedo y la división de dos segmentos solo tenía sentido cuando la dimensión del dividendo era mayor a la dimensión del divisor, se asume como un obstáculo hasta que Descartes (1619), Fermat (1640), dan un giro, al considerar todas las operaciones entre segmentos como otro segmento y de manera implícita se puede establecer una relación entre segmentos y números reales, lo que hace que el concepto de variable adquiera otro significado.

2.2.4.4 Concepción algebraica.

En el siglo XVIII se llega a tener la idea de que las relaciones esenciales son aquellas que se describen por medio de expresiones algebraicas y ecuaciones. La definición de función de una cantidad variable como una expresión analítica compuesta de alguna manera por esa cantidad variable y números o cantidades constantes deja entrever una clara dependencia entre expresión analítica y función, aspecto que se constituye en un obstáculo puesto que las llamadas curvas mecánicas no se puede tratar bajo este análisis, desvinculando las matemáticas de la física. Poco después, Newton descubrió el desarrollo de funciones en series infinitas de potencias, reduciendo significativamente las restricciones de Descartes y posibilitando la representación analítica de la mayoría de las funciones estudiadas en esa época. Más adelante el desarrollo de los números reales y la teoría de conjuntos eliminan esta dificultad.

2.2.4.5 Concepción mecánica de una curva.

Para Galileo (1604), Torricelli (1643), Roberval (1631) o Newton (1663), las curvas eran consideradas como trayectoria de puntos en movimiento, lo cual significa que al concepto de función se le asociaba a la noción de curva y no se consideraba como un conjunto de puntos que satisfacen las condiciones de una relación funcional.

A través de los denominados obstáculos epistemológicos del concepto de función, que se enumeraron anteriormente, se pretende establecer por una parte, una aproximación de la incidencia de las creencias de este concepto, en un grupo de estudiantes de la facultad económico administrativas de la Universidad de Medellín.

2.3 DE LOS REGISTROS SEMIOTICOS Y DEL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE FUNCION EN LOS ESTUDIANTES.

Iniciamos esta sección con un señalamiento que realiza Raymond Duval acerca del aprendizaje de la matemática:

> El aprendizaje de la matemática constituye, evidentemente, un campo de estudio privilegiado para el análisis de actividades cognitivas fundamentales como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas, e incluso, la comprensión de los textos. La particularidad del aprendizaje de las matemáticas hace que estas actividades cognitivas requieran de la utilización de sistemas de expresión y de representación distinta a los del lenguaje natural o de las imágenes… (Duval, 2004, p.13)

En las tres últimas décadas, en Estrasburgo, en el equipo de François Pluvinage y Raymond Duval se ha trabajado fuertemente en los llamados "registros de representación semiótica", la noción y coordinación de estos registros son fundamentales. Por lo tanto iniciamos precisando algunos conceptos.

Según el diccionario LEXIS (1976) la semiótica trata de la ciencia de los signos o semiología, del estudio de las relaciones de los signos entre sí (se ocupa de las reglas de formación y de las reglas de transformación de todo sistema de signos).

Por otra parte Raymond Duval llama "semiosis la aprehensión o la producción de una representación semiótica, y noesis los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un concepto…" (Duval, 2004, p. 14). Lo planteado por Duval se puede resumir al siguiente enunciado "no hay noesis sin semiosis", esto se puede interpretar como que no se puede aprender un concepto matemático sin pasar por el necesario tratamiento y conversión de diferentes registros de representación semiótica.

"En matemáticas las representaciones semióticas no sólo son indispensables para fines de comunicación, sino que también son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma" (Duval, 2004, p. 15).

No siempre es posible en toda actividad matemática, poder hacer uso de diferentes registros de representación como una primera aproximación a la construcción de un concepto, en el caso de las funciones matemática si es posible, de allí que la combinación adecuada de ellos proporciona diferentes perspectivas y muestra los diferentes usos de tan importante concepto. En este sentido se tiene:

> De manera más global, se puede constatar que el progreso de los conocimientos se acompaña siempre de la creación y del desarrollo de sistemas semióticos nuevos y específicos que más o menos coexisten con el primero de ellos, el de la lengua natural. Así, la formación del pensamiento científico es inseparable del desarrollo de simbolismos específicos para representar los objetos y sus relaciones (Granger, 1979, p. 21-47 citado por Duval 2004).

Indudablemente en el desarrollo de cualquier disciplina científica, el lenguaje propio en combinación de los símbolos, gráficos, dibujos y otras representaciones, hacen de esta una fuente de conocimiento invaluable, que bien orientadas permite un acercamiento a su comprensión y posterior estudio. En el caso particular de la matemática, históricamente encontramos dentro de su desarrollo una diversificación muy amplia de los denominados sistemas semióticos de representación.

En el estudio de la matemática como es bien conocido, se hace uso de una variedad de tipos de representaciones semióticas y se hace referencia con frecuencia a los objetos matemáticos, es por ello que para comprender la actividad de tan importante disciplina, es fundamental tener clara la noción de estos objetos, por ejemplo, los números, funciones, expresiones algebraicas, coordenadas, representación cartesiana, entre otros, son objetos con los que con frecuencia se trabaja en matemática, es por ello que se debe conocer y entender sus propiedades así como los diferentes registros a los que tiene lugar en cada situación, para así hacer un buen uso de ellos.

Así observamos que para potenciar las capacidades del estudiante, se hace necesario por parte del docente, como estrategia de enseñanza, apoyar los conceptos con elementos gráficos, figurales, tabular, algebraico, numérico y analítico en esa medida se estará fomentando y propiciando espacios para los razonamientos y posteriormente los cálculos matemáticos que tengan lugar. Estas representaciones simbólicas inicialmente y en todo momento van acompañada de la palabra y el lenguaje propio de la disciplina. En este proceso a la par que el estudiante va madurando las primeras nociones, se puede llegar a una primera aproximación de formalización y rigurosidad propia de la matemática.

La conceptualización, el razonamiento, la aprehensión de figuras, la resolución de problemas e incluso la comprensión de textos son actividades cognitivas fundamentales cuyo estudio compete a campos tan diferentes como los de la psicología, las ciencias de la educación, la didáctica e incluso la inteligencia artificial. Las cuestiones relativas a su desarrollo, a su aprendizaje a su modelación, son esenciales.

La diversificación de los registros de representación semiótica es la constante del desarrollo de los conocimientos, tanto desde el punto de vista individual como científico o cultural. En este sentido y a manera de ejemplo para el caso particular del concepto de función matemática apoyamos lo siguiente

> Desde este punto de vista teórico podemos analizar cómo ha sido la instrucción sobre el concepto de función. Es un hecho que la enseñanza del concepto de función se restringe regularmente al paso de una expresión algebraica o tabla a una representación gráfica. Se

> ha señalado por varios autores (Duval, 2004; Hitt, 1996b), entre otros, que se descuida en la instrucción el paso de una representación gráfica a una expresión algebraica, siendo ésta una tarea difícil pero necesaria en este contexto teórico para la construcción del concepto de función. De hecho, en paquetes de software de matemáticas son muy pocos los que han desarrollado actividades en este sentido. Se ha dejado solo al estudiante para que establezca una conexión de las representaciones gráficas hacia las expresiones algebraicas. (Hitt, 2001, p.169)

Desde esta perspectiva, queremos a través de un instrumento, establecer como los estudiantes de la Facultad de las carreras económicos administrativos de la Universidad de Medellín, se aproximan desde la conversión de dos o más registros de representación a sus creencias de lo que es el concepto de función matemática.

En relación a esto último Duval (2004) citado por Prieto y Vicente (2006), "afirma que para la aprehensión de un concepto matemático es necesario que el alumno sea capaz de interactuar entre diferentes registros de representación (Prieto y Vicente, 2006, p. 205)

Para el logro de los objetivos de este trabajo y para dar respuesta a la pregunta de investigación que formulamos en el capítulo 1, se hace necesario por todo lo anteriormente planteado, establecer cuáles de los registros de representación presentes en el instrumento aplicado a los estudiantes de nuestra muestra, son más utilizados por ellos para vincularlos con el concepto de función y como estos influyen sobre sus creencias al respecto.

Los registros de representación involucrados en este trabajo, se resumen en la siguiente tabla, para ello nos apoyamos en el trabajo de Rechimont y Ascheri (2002) en lo que respecta a los registros

REGISTROS DE REPRESENTACION	DESCRIPCION
REGISTRO VERBAL	**El lenguaje común se utiliza para representar situaciones del mundo real**
REGISTRO ANALÍTICO	**Cuando se da la definición de algún concepto mediante una expresión algebraica.**
REGISTRO SIMBOLICO	**Cuando se da la definición de un concepto mediante expresiones simbólicas sustentadas por reglas de la lógica formal.**
REGISTRO FIGURAL	**Cuando un concepto se representa mediante una figura.**
REGISTRO ALGEBRAICO	**Cuando se representa algún concepto por medio de operaciones algebraicas.**
REGISTRO TABULAR	**Cuando los valores numéricos están organizados mediante tabla de valores.**
REGISTRO NUMERICO	**Cuando el método de cálculo conlleva al número en las evaluaciones.**
REGISTRO GRAFICO	**Cuando se utilizan gráficos, plano cartesiano, convenios implícitos en lectura de gráficos etc.**

Tabla N° 2.3.1 Registros de Representación (Fuente: Rechimont y Ascheri (CIEMAC, 2002))

Partiendo de esta tabla y el diseño del cuestionario (Ver anexo), para aplicárselo a los estudiantes de la muestra, se puede lograr recoger información relacionada con los objetivos propuestos en este trabajo, de esta forma nos aproximamos por una parte a la descripción de los grupos de estudiantes y a las incidencias de los registros de representación en la construcción del concepto de función.

2.4 CREENCIAS Y CONCEPCIONES EN LA ENSEÑANZA DE MATEMÁTICA

En esta sección abordaremos algunas nociones sobre creencias y concepciones en la enseñanza de la matemática, actualmente se han desarrollado múltiples investigaciones orientadas desde las concepciones y creencias de determinados temas de matemática, las investigaciones abarcan todos los niveles de la educación, pero en su mayoría la realizan desde la formación de docentes en educación matemática. En este trabajo se aborda las creencias y concepciones de un grupo de estudiantes en formación, en carreras económicas administrativas de la Universidad de Medellín, en relación al tema de funciones matemáticas y su aplicación, en situaciones problemas dentro de su programa de estudios.

Iniciaremos realizando un breve recorrido sobre la posición de algunos investigadores de lo que considera o aceptan es una creencia y una concepción, en algunos trabajos de investigación adicionalmente coinciden en destacar relación entre los términos *conocimientos, creencias y concepciones*, en esta investigación coincidimos con lo señalado por Moreno y Azcarate (2003) en el sentido de que consideramos las concepciones y creencias como componentes del conocimiento.

A continuación se muestran algunas de las acepciones de algunos investigadores.

Para Linares (1991) y Pajares (1992) cuyos planteamientos sobre creencias son similares y son citados por Moreno y Azcarate (2003) señalan:

> Las creencias son conocimientos subjetivos, poco elaborados, generados a nivel particular por cada individuo para explicarse y justificar muchas de las decisiones y actuaciones personales y profesionales vividas. Las creencias no se fundamentan sobre la racionalidad, sino más bien sobre los sentimientos, las experiencias y la ausencia de conocimientos específicos del tema con el que se relacionan, lo que las hacen ser muy consistentes y duraderas para cada individuo.

En el caso de los estudiantes universitarios, observamos que ellos traen unas creencias en muchos casos desde el bachillerato de lo que es una función, debido a que este tema es transversal al currículo de matemática, casi desde el inicio de este ciclo de estudios. Esta creencia se ha venido “enriqueciendo” desde ciertas experiencias y de diversos enfoques de acuerdo al docente de turno, iniciando con las funciones lineales y constantes para posteriormente en cursos más adelantes con las funciones cuadráticas, exponenciales logarítmicas, hasta completar con las funciones trigonométricas.

Para Thompson (1992) citado por Flores (1995, p. 73), “las creencias forman parte de las concepciones”, y da alguna característica que forma las creencias, cuando la diferencia es de conocimiento:

> Una característica de las creencias es que pueden ser sostenidas con varias grados de convicción.
> (..) Otro rasgo distintivo de las creencias es que no son consensuales.
> (..) Las creencias, por otra parte, son a menudo mantenidas o justificadas por razones que no cumplen estos criterios, y por tanto, son caracterizadas por una falta de acuerdo sobre cómo tienen que ser evaluadas o juzgadas. (p. 129-130)

Para cerrar sobre la acepción de creencias, siguiendo a Moreno y Azcárate (2003), citado por Mora y Barrantes (2008, p. 73),

> …las creencias son ideas poco elaboradas, generales o específicas, que forman parte del conocimiento que posee la persona (docente, estudiante) e influyen de manera directa en su desempeño. Las creencias inciden, de manera decisiva, en todo lo que supone el proceso de enseñanza y aprendizaje. Por otra parte, debe considerarse que las personas no siempre están conscientes de sus creencias; además, éstas pueden cambiar con el tiempo, debido a diversas causas.

En este sentido, los estudiantes en sus primeros semestres universitarios, independiente de sus carreras, traen consigo algunas ideas muy vagas y algo generales acerca de lo que es una función, escasamente recuerdan algunos episodios de estos temas y al momento de interrogarlos al respecto, traen a acotación algunos momentos relacionados con algunos registros de representación que usaba el docente, pero sus recuerdos están muy alejados del concepto como tal, inmediatamente surge entre ellos el ¿ para qué? , ¿Por qué? ¿ y donde usamos la función?, dejando en evidencia el poco interés de ello por este tema tan importante a lo largo de su formación.

De igual forma, con relación al término concepción desde una posición cognitivista del término, a manera de síntesis y siguiendo a Ponte (1994), Thompson (1992) y Linares (1991) citado por

Moreno y Azcárate (2003, p. 267), quienes realizan una sinopsis de los planteamientos de estos investigadores:

> Las concepciones son organizadores implícitos de los conceptos, de naturaleza esencialmente cognitiva y que incluyen creencias, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, preferencias, etc., que influyen en lo que se percibe y en los procesos de razonamiento que se realizan. El carácter subjetivo es menos en cuanto se apoyan sobre un sustrato filosófico que describe la naturaleza de los objetos matemáticos.

Desde esta perspectiva, "las concepciones son constructos cognitivos que pueden verse como el marco subyacente que organiza los conceptos en el individuo." (Ponte 1992; citado por Mora y Barrantes, 2008, p. 73).

En lo que respecta a las concepciones sobre las matemáticas y su enseñanza, tenemos el caso de Vila y Callejo quienes por ejemplo, para explicarlo de una manera más práctica hacen referencia "al término concepto para referirse a las ideas del alumnado asociados a conceptos concretos; por ejemplo hablaremos de "concepciones" de los alumnos sobre probabilidad. Y usaremos el término creencia para referirnos a las ideas de los alumnado asociado a actividades y procesos matemáticos (ejercicios, problemas, demostración, resolución de problemas…) y a la forma de proceder en el quehacer matemático; por ejemplo diremos: "La creencia del alumnado sobre la forma de abordar problemas de probabilidad"". (Vila y Callejo, 2004, p.49)

Algunos autores hacen referencia dentro de las creencias a su naturaleza, por ejemplo, S. Linares (1992) citado por Vila y Callejo (2004, p.51) se refiere a tres aspectos siguientes:

1. *Dominio*: Definido como "envoltorio" y los compromisos personales de la creencia establecida. Este componente se puede inferir del uso de afirmaciones que describen elecciones personales, decisiones y acciones (es decir, el contenido de la creencia).
2. *Razones* o argumentos que acompañan la elección de la creencia y relacionan las creencias y las acciones. Este componente se infiere del uso de los términos "porque" y "como", que explican la importancia de la creencia.

3. *Práctica aplicada*, que describe la transferencia individual de las creencias a la práctica. La utilización de este componente ayuda a describir las creencias individuales y a realizar las comparaciones entre los sistemas de creencias de los estudiantes.

Otros investigadores hablan de sistemas de creencias, origen de las creencias, no pretendemos en esta investigación profundizar y entrar en estos aspectos importantes así como en detalles filosóficos, sino más bien brindar una visión amplia que permita contextualizar y delimitarnos a los objetivos de nuestra investigación. En este sentido compartimos los planteamientos de Vila y Callejo (2004, p.54) que se centra y permite orientar lo que se persigue en la investigación, al considerar la muestra de los estudiantes de la Universidad de Medellín.

> El interés por conocer la estructura de los sistemas de creencias de los estudiantes, del profesorado y, en general, de otros agentes educativos, radica en el hecho de que inciden en sus comportamientos, ayudan a explicarla y ofrecen pistas para tratar de modificarlos. Las creencias influyen en la forma en que se aprende, se enseña y se aplica la matemática; a su vez, la forma de aprender y utilizar la matemática configura las creencias.

Es bien importante lo señalado en la cita del párrafo anterior, sin embargo, lo que buscamos como parte de nuestros objetivos, no es modificar del todo tales creencias, sino en base a las creencias de los estudiantes, es tratar de potencializar con algún tipo de estrategia que dimensione y permita redireccionarla en favor de una apropiación correcta del concepto, enfatizar en su importancia, pertinencia y relevancia dentro de estos grupos de estudiantes, que cursan carreras en las ciencias económico administrativas. De alguna manera que desde esta mirada los estudiantes puedan darles respuestas a muchas de las interrogantes que tiene acerca de las funciones matemática y su utilidad dentro de su formación.

El poder mostrar estas visiones de diferentes autores, las cuales convergen y coinciden en muchos aspectos, nos permite sentar las bases de lo que entenderemos y tendremos presente a lo largo de esta investigación en relación a creencias y concepciones.

2.5. VALORACION Y ANALISIS DE CONTENIDO DE LA NOCION DE FUNCION DESDE LOS TEXTOS UNIVERSITARIOS

En esta sección, abordaremos el enfoque de tres textos universitarios en cuanto a la noción de función, la importancia y aplicaciones dentro de las carreras económicas administrativas que hacen estos libros, para ello realizaremos un instrumento que maneja elementos del análisis de contenido, combinado con elementos de la valoración de texto, todo esto en el caso del contexto universitario. La combinación nos aproximará a una descripción cuantitativa por una parte y otra de tipo cualitativa.

Como ocurre en muchos casos, la presencia del libro de texto en el aula va siempre unida a la labor profesional del profesorado, en el caso del micro-currículo de cálculo diferencial, para los estudiantes de la facultad de las carreras económico administrativas, se encuentra dentro de la bibliografía, con un libro de texto guía y dos libros complementarios. El primero de ellos orientados hacía aplicaciones dentro del ámbito de la administración, economía, finanzas, etc., y los otros dos con algunas aplicaciones adicionales a las de corte económico-administrativa.

Según Monterrubio y Ortega, es habitual la utilización de un libro de texto en el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje. Este hecho hace que la elección del texto escolar sea una tarea muy importante. Pero no se trata de una tarea sencilla, ya que como señalan diversos autores (Del Carmen, 1994) (García, 1995) (Monterrubio, 2000) son muchas las variables que se deben tomar en cuenta.

Siguiendo a Escudero (1938), el libro de texto está constituido por tres dimensiones: a) semántica, es decir su contenido; b) estructural – sintáctica, que hace referencia a su forma de organización y sistemas de símbolos; y c) programática, donde se tiene en cuenta su uso, propósito, etc. Esta última dimensión pone de manifiesto que el análisis de un texto escolar no puede hacerse de manera aislada, sino como señalan Gimeno (1988) y Santos (1991) es preciso tener en cuenta el uso que se pretende hacer de dicho material en el aula y el modelo de enseñanza y aprendizaje que se desea desarrollar.

Rodríguez (1983), siguiendo a Ricaudeau (1976) citado por Monterubio y Ortega (2011) considera al libro de texto como "un material impreso, estructurado, destinado a ser utilizado en un proceso de aprendizaje y de formación concertada" (p. 259) prestando atención de forma específica al área de las matemáticas, Van Dormolen (1986) distingue tres tipos de libros de texto: (a) aquellos que constan solo de ejercicios y problemas, (b) Los que se componen de teoría por un lado y problemas y ejercicios por otro, y (c) los que constituyen una mezcla en la que se presenta la teoría, los ejercicios y problemas mezclados. Para este autor, este último tipo de libro se podría considerar como un profesor en sí mismo y señala que el autor de este tipo de manuales escolares pretende escribir un libro "a prueba de profesores".

La presencia del libro de texto en el aula va siempre unida a la labor profesional del profesorado como se pone de manifiesto en las conclusiones del III Encuentro Nacional sobre el libro Escolar y el Documento Didáctico, presentadas por el grupo Alborán (1991), donde se señala que "un libro por bueno que sea, será un instrumento ineficaz en el aula, si no se cuenta con la labor del profesor, factor imprescindible de la acción educativa (p.7). En el informe Cockroft (1982-1985) se destaca la importancia del uso del libro de texto como "ayuda inestimable" para el profesor en el trabajo diario del aula. Además, señala que no es fácil aprender matemáticas con un libro y la capacidad de hacerlo puede exigir mucho tiempo.

Ortega (1996) presenta un modelo de valoración de textos escolares de matemáticas estructurado mediante diez organizadores: entorno, sobre la teoría, ilustraciones, enfatización, ejercicios, cuestiones y problemas, motivación, metodología, actividades, nuevas tecnologías y otros. Este autor espera que el profesorado pueda realizar una valoración objetiva del libro de texto utilizando este instrumento de evaluación y, para ello, propone un instrumento combinado con la técnica de análisis de contenido que permita valorar la utilización no de un libro de texto atendiendo a ciertos parámetros que veremos mas adelante en el capítulo

CAPITULO 3: ANALISIS DE RESULTADOS

En este capítulo apoyados en el instrumento de recolección de la información, que corresponde al cuestionario (Ver Anexo), que se le aplico a la muestra, se reportara los resultados desde una perspectiva cuantitativa y cualitativa, con la finalidad de establecer una descripción aproximada acerca de las creencias de este grupo de estudiantes en relación al concepto de función matemática y él como estas creencias inciden en su desempeño e interpretación de algunos planteamientos que se abordan en el instrumento, tomando como fundamentos los registro de representación semiótica.

3.1 SEGUIMIENTO Y ANALISIS DE LOS TEXTOS USADOS EN EL CURSO DE CALCULO DIFERENCIAL

A continuación se realiza el análisis de los textos, indicando con una “x” para la determinación del objeto determinado en el documento, utilizado por el estudiante para el curso motivo del estudio. Primero iniciaremos con la ficha técnica de los libros. Es de destacar que el Micro-Currículo de Calculo Diferencial, para las carreras económico administrativas, se apoya en un libro de texto guía y en dos textos complementario. El rol del libro de texto guía es en el sentido estricto de la palabra, es decir, sirve como un orientador constante para el docente y el estudiante en el cumplimiento de los objetivos propuestos en el curso.

Texto	Autor (es)	Editorial	Año y país	Capítulo referido al tema de función.
Texto N°1: ***Matemáticas aplicadas a la Administración y a la Economía.***	Arya, J.; Lardner, R.; Ibarra	Prentice Hall.	México, 2009. 5ta. Edición.	Capítulo 5.
Texto N°2: ***Calculo una Variable.***	George B, Thomas.	Addison – Wesley.	México. 1998. 12da edición	Preliminares.
Texto N°3: ***Calculo Diferencial e Integral***	Stewart James.	Editorial Thomson	México. 2007. 2da Edición.	Capítulo 1.

Tabla 3.1. Ficha técnica de los libros valorados (Fuente: Autor)

Dentro de la valoración usada tenemos una escala Likert y que se muestra a continuación, en ella se recogen aspectos de orden cuantitativo. Los valores numéricos 1, 2 y 3 presentes en el **instrumento de valoración, hacen referencia en ese orden a los tres libros de texto que aparecen** en la ficha técnica de la tabla 3.1.

Tabla 3.2 Características de los libros de textos.

	Totalmente			En su mayoría			Medianamente			Pocas veces			Nunca		
	1	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**
¿Es un libro pensado para el profesor?	x		x		x										
¿Está pensado para el alumno?	x				x	x									
¿Es apropiado para el trabajo individual?	x	x				x									
¿Contempla actividades para trabajos en grupo?				x	x	x									

Tabla 3.3. Sobre la Teoría

	Totalmente			En su mayoría			Medianamente			Pocas veces			Nunca		
	1	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**
¿La teoría es suficiente para la comprensión de los temas tratados?	x	x	x												
¿Plantea la teoría a estudiar en un contexto de resolución de problemas?	x	x	x												
¿Abundan los ejemplos referido a la aplicaciones disciplinares?	x							x	x						
¿Está bien organizada la materia, está bien compuesto el texto, en cuanto a la presentación de la información?	x	x							x						
¿Las aplicaciones, entran dentro del contexto disciplinar del estudiante?	x							x	x						

Tabla 3.4. Ilustraciones

	Totalmente			En su mayoría			Medianamente			Pocas veces			Nunca		
	1	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**
¿Enfatiza los contenidos importantes?	x							**x**	**x**						
¿Tiene muchos subrayados, negrita, cursiva, tamaños de letra, etcétera?						**x**	x	**x**							
¿Recuadra las definiciones, formulas y enunciado haciendo destacar los más importantes?							**x**	**x**	**x**						

Tabla 3.5. Motivación

	Totalmente			En su mayoría			Medianamente			Pocas veces			Nunca		
¿Abundan los detalles de tipo histórico?	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**
				x										x	x
¿Justifica algún tema con la necesidad social de su estudio?				**x**	**x**										x
¿Conecta la teoría con los problemas de la vida ordinaria?				**x**	**x**	**x**									

Tabla 3.6. Actividades

	Totalmente			En su mayoría			Medianamente			Pocas veces			Nunca		
¿Propone alguna actividad tipo taller?	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**
							x		x		x				
¿Sugiere algún trabajo de investigación?							x	x	x						
¿Invita a buscar problemas de la vida ordinaria sobre la teoría estudiada?							x	x	X						

Tabla 3.7. Nuevas tecnologías

	Totalmente			En su mayoría			Medianamente			Pocas veces			Nunca		
¿Propone tareas para usar la calculadora?	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**
				x	**x**				**x**						
¿Sugiere realizar alguna tarea con el computador?				**x**	**x**				**x**						
¿Propone tareas de exploración numérica?					**x**		**x**		**x**						

A continuación en función de la valoración obtenida, para las distintas categoría consideradas para la valoración de los tres libros de textos, le asignaremos una puntuación de la siguiente forma a: Totalmente 5, En su mayoría 4, Medianamente 3, Pocas veces 2, Nunca 1, consideraremos unos intervalos que se muestran a continuación con su respectiva descripción.

Intervalos de acuerdo a la valoración	Descripción-Categorización
Entre 86 y 105 (PERCENTIL 75)	APROPIADO: El libro de texto se presta como un mediador entre el docente y estudiante, favoreciendo significativamente el proceso de enseñanza de aprendizaje, propiciando espacio de trabajo independiente, auto gestionado que potencia y motiva efectivamente el concepto de función matemática en una completa sinergia con los contenidos, las actividades y herramientas tecnológicas, articula oportunamente distintos registros de representación semiótica.
Entre 66 y 85 (PERCENTIL 50)	ORIENTADOR: El libro de texto regularmente se presta como un mediador del estudiante y el docente, se requiere un mediano acompañamiento por parte del docente que permite con un trabajo de asesoría permanente realizar una mirada en el avance de los distintos conceptos. La integración de distintos registros de representación semiótica no se logra con relativa facilidad.
Entre 46 y 65 (PERCENTL 25)	CONSULTA: El libro de texto por su naturaleza es de uso casi exclusivo para el docente, relegando al estudiante a las actividades que ofrece, y se necesita un acompañamiento constante de parte del docente para poder garantizar una conversión de los distintos registros de representación semiótica por parte del estudiante.
45 o menos (POR DEBAJO DEL PERCENTIL 25)	INAPROPIADO: El libro de texto carece de un enfoque pedagógico y didáctico que potencie y favorezca su seguimiento y utilización por parte del estudiante. No es su punto fuerte el uso adecuado y conversión de los distintos registros de representación semiótica

Tabla 3.8. Intervalos de categorización de los libros de textos.

Luego de realizar las totalizaciones de las puntuaciones para cada uno de los libros de textos, tenemos que el libro de texto guía que se usa para el curso de cálculo diferencial para las carreras económico administrativas obtuvo un total de 87, siendo entonces un libro catalogado como APROPIADO, dado que posee un enfoque que favorece la comprensión del tema de funciones matemáticas y enfatiza en las aplicaciones dentro del contexto de las aplicaciones en las carreras económico administrativas de la Universidad de Medellín.

Adicionalmente el texto guía, articula constantemente distintos registros de representación semiótica, propiciando espacios para que el estudiante pueda con trabajo independiente el logro de la conversión de dos o más registros de representación.

Usa elementos gráficos para destacar las definiciones y resaltar propiedades que debe tener en cuenta el lector para que le sirva de referencia para el desarrollo de ejemplos y actividades que aparecen al final de cada sección. Presentan una cantidad importante de ejercicios que se pasean por diferentes niveles de dificultad, donde se busca afianzar ciertas habilidades y destrezas algebraicas en comunión con aspectos gráfico, tabular y de interpretación en diferentes contextos. Se evidencia el uso de problemas en un contexto real y dentro de una cotidianidad acorde con el público a quien va dirigido. Cierra los capítulos con ejercicios de repaso del mismo y adicionalmente fomenta el llamado “CASOS DE ESTUDIO”, el cual es un espacio para que el estudiante se autoevalúe en la concreción, aplicación, apropiación y reflexión de los temas vistos en el capítulo. Las actividades están también diseñadas para el uso de herramientas tecnológicas tales como: la calculador y algunos software educativos interactivos.

En relación al texto N° 2, **“Cálculo una variable”,** obtuvo un total de 77, de esta manera queda categorizado como ORIENTADOR, por ser un texto muy completo en lo que se refiere a la presentación de conceptos básicos, propiedades, el uso que hace de los distintos registros de representación semiótica y la forma de articulación constante. Resalta y destaca aspectos relevantes, presenta un enfoque que no está centrado solamente en aplicaciones de la administración y la economía, sino que aborda aspectos relacionados con la ingeniería, la física y otras disciplinas, adicionalmente usa situaciones extraídas del deporte, donde en este último se requiere que el estudiante este familiarizado con actividades deportivas que no tienen por qué ser del total atractivo para él, por lo tanto se debe ser muy selectivo a la hora de resolver actividades tales como ejercicios, problemas y proyectos. El trabajo independiente del estudiante con este libro de texto requiere un mayor acompañamiento por parte del docente, dado la naturaleza de algunas de las actividades.

Finalmente cerramos, con el libro de Texto n° 3 ***"Calculo Diferencial e Integral"***, posee característica similar al libro de texto n°2, obtuvo un total de 80, quedando categorizado como ORIENTADOR, su enfoque permite complementar la información que se pueda recibir en el aula, por tener los temas de Cálculo Integral se hace referencia y busca que el estudiante logre un buen manejo de aspectos gráficos y algebraicos necesarios para el posterior abordaje de las aplicaciones. Las aplicaciones se centran más a problemas de las ciencias básicas, ingenierías y otras extramatemáticas con las cuales el estudiante no tiene por qué estar familiarizado.

3.2 INDAGACIÓN DEL USO Y LA NOCIÓN DEL CONCEPTO DE LA FUNCION MATEMÁTICA QUE POSEEN LOS ESTUDIANTES DE ECONOMIA Y ADMINISTRACION DE EMPRESAS DE LA UNIVERSIDAD DE MEDELLIN.

3.2.1 DESARROLLO DEL CUESTIONARIO

Con el cuestionario que se muestra en el anexo, se pretende evaluar la noción acerca del concepto de función, analizar sus dificultades de aprendizaje, extraer elementos que permitan obtener esa aproximación del concepto de función que tiene este grupo de estudiantes.

Con esta actividad nos aproximaremos a la idea que manejan este grupo de estudiantes para interpretar varias de las características de las funciones matemáticas tales como: la notación simbólica, las gráficas, la noción de variable discreta, la construcción de una fórmula, las maneras de representar una función, entre otras.

Expondremos un marco general con una serie de preguntas, cuyas respuestas cuantitativas y sistemáticas van a conducir a una clasificación del estado de conocimiento del estudiante acerca del concepto de función.

Dentro de las variables a estudiar, en este grupo de estudiantes están:

Entorno:

- Es un cuestionario pensado para el nivel de competencias del estudiante.
- Es apropiado para el trabajo individual
- Contempla actividades para trabajo en grupo.
- Están contemplados todos los contenidos del concepto de función.
- Adecuado a los tipos de enseñanza que se están practicando en la universidad.
- Está apropiado para el tipo de alumnos que cursan estudios en las carreras económico administrativa de la Universidad de Medellín.

Sobre La Teoría

- Plantea la teoría de función en un contexto de resolución de problemas.
- Está adecuado el cuestionario a los conocimientos que debe poseer el alumno para tener éxito en sus respuestas.

Ilustraciones

- Tiene suficientes gráficas
- Utiliza los gráficos para aclaración de la teoría.
- Son claras las descripciones de los elementos de las figuras

Ejercicios, cuestiones y problemas

- Tiene suficientes ejercicios
- Cubre la teoría de función
- Avanza cualitativamente.
- Plantea cuestiones teóricas.
- Plantea cuestiones numéricas.
- Tiene cuestiones gráficas.

- Propone ejercicios para que el estudiante interiorice el simbolismo

La motivación

- Conecta la teoría expuesta con problemas de la vida diaria
- Tiene conexiones con otros temas propios de otras ciencias

Metodología

- Señala algún procedimiento de actuación en la noción de función.
- Marca alguna pauta para la evaluación de función
- Tiene modelos de auto evaluación para el estudiante

Creencias

- Explora las creencias que tiene el estudiante sobre el concepto de función.
- Permite identificar creencias del estudiante sobre la solución de funciones

3.2.3 APLICACIÓN DEL CUESTIONARIO

En la Universidad de Medellín se seleccionaron 56 estudiantes de segundo y tercer semestre de las carreras de Negocios Internacionales, Contaduría Pública y Administración de Empresas, del período lectivo 2011-2. Es un grupo homogéneo teniendo en cuenta sus características de edad, vocación y aptitudes.

Se aplicó en el segundo semestre de su programa de estudios, allí estudiaron cálculo diferencial, entre otros cursos correspondientes al mismo nivel o semestre de su plan de estudios. Este cuestionario fue aplicado al finalizar el curso de 16 semanas, donde se realizaron 6 pruebas de seguimiento como eventos evaluativos de corte formativo y dos eventos evaluativos de tipo sumativo, que son un examen PARCIAL y un FINAL.

FICHA TÉCNICA DEL INSTRUMENTO

Número de personas encuestadas: 56

Edad de los encuestados:

Edad	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**Más de 21**
Número de personas	16	19	12	4	3	2

Programa académico de los encuestados

Programa	**Nº de personas**
Administración de empresas turísticas	5
Contaduría Pública	19
Administración de empresas	16
Negocios Internacionales	15
Mercadeo	1
TOTAL	**56**

3.2.4 EVALUACION CUESTIONARIO

Teniendo en cuenta las características y las peculiaridades del estudiante colombiano y los objetivos que se han marcado en este estudio, presentamos una valoración del cuestionario.

- Es un cuestionario sencillo, de fácil comprensión de lectura, donde se tuvo en cuenta el nivel de competencias del estudiante.
- Se trata de un repaso del material estudiado en los grados 10º y 11º de Bachillerato.
- Son quince preguntas organizadas para explorar en qué condiciones se encuentra el estudiante para avanzar en el conocimiento de función.
- Utilizamos cuatro gráficas de fácil comprensión.
- De las quince preguntas 10 son teóricas y 5 numéricas.

- Hay dos preguntas relacionadas con problemas de la vida diaria.
- Hay tres preguntas donde invita al estudiante a plantear su creencia sobre la noción de función, el cálculo mental y la resolución de problemas.
- El cuestionario está programado para resolverlo en condiciones normales en una hora.
- Se desarrolla el cuestionario en un ambiente satisfactorio para el estudiante.
- Dentro de los obstáculos que se le presentan al estudiante están los registros e interpretación del lenguaje algebraico, numérico, verbal y gráfico.
- El estudiante no establece conexiones entre los diferentes tipos de representaciones del concepto de función.

Las preguntas se clasificaron de la siguiente manera:

1. Abiertas directas (1,5,6 a,6b,6c,7 a,7b,8 a,8b,8c,9).
2. Abiertas indirectas (2, 3, 4).
3. Ítems con opción escalar (10, 11, 12, 13).
4. Preguntas de asociación (14,15)

Teniendo en cuenta los criterios de la tabla 2.3.1, del capítulo 2, las preguntas del cuestionario, se clasificaron, de acuerdo al tipo de registro de representación al que se hace referencia y que predomina en cada pregunta del cuestionario. (Ver Anexo)

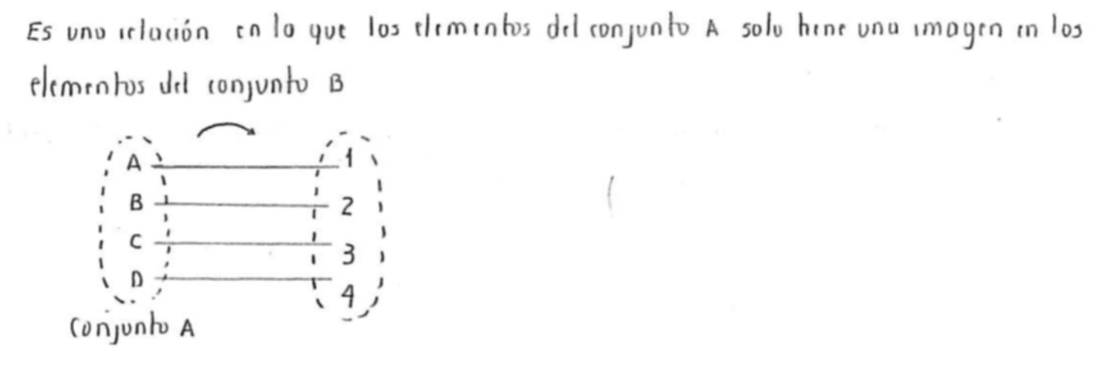
Número de la pregunta	Tipos de Registros presentes o predominante.	Número de la pregunta	Tipos de Registros presentes o predominante.
1	Figueral	8	Algebraico
2	Analítico	9	Conversión de registros
3	Gráfico, Algebraico, Tabular	10	Conversión de registros
4	Simbólico	11	Conversión de registros
5	Analítico, Simbólico	12	Conversión de registros
6a	Tabular, Gráfico	13	Conversión de registros
6b	Verbal, Tabular	14	Conversión de registros
6c	Analítico, Numérico	15	Conversión de registros
7a y 7b	Gráfico		

Tabla 3.2.4.2 Preguntas del cuestionario según registro de representación

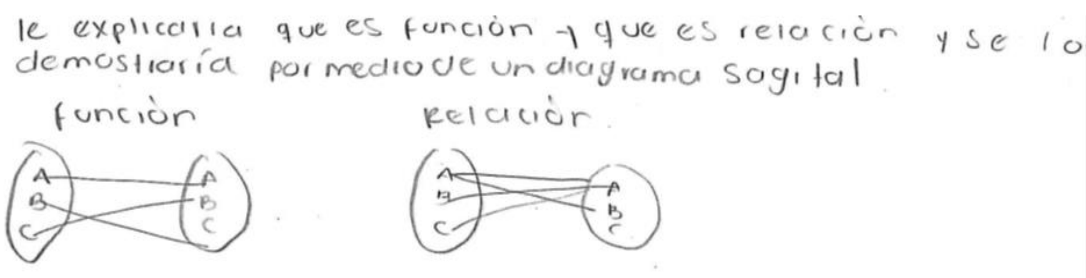
3.2.5 SEGUIMIENTO DE RESULTADOS DEL CUESTIONARIO

A continuación se presentan los resultados obtenidos en la aplicación del cuestionario (Ver Anexo), pregunta por pregunta, con el fin de obtener una visión aproximada y estadística.

<u>En la primera pregunta</u> del cuestionario, sólo tres estudiantes utilizaron un tipo de registro figural; 33, optaron por explicar la definición con algún argumento verbal y analítico. Muchos estaban lejos de la definición real. Diez estudiantes dejaron en blanco. Un estudiante combinó algún tipo de registro verbal con uno grafical, en su propósito de explicar acertadamente. El resto de los estudiantes presentaban confusiones serias entre variables, ecuaciones y otros elementos matemáticos. Dos manifestaron no tener los conocimientos para responder.

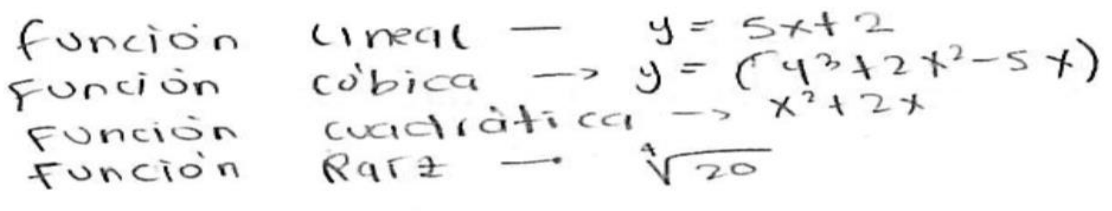


<u>Estudiante A</u>. Observamos el uso de un tipo de registro gráfico.

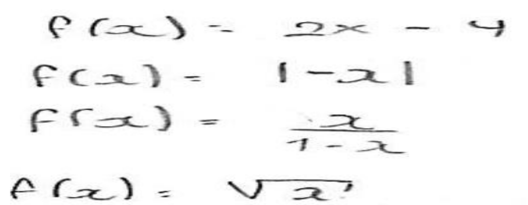


<u>Estudiante B</u>. Observamos nuevamente en otro estudiante el uso de un tipo de registro gráfico, para apoyar su explicación verbal el concepto de función.

<u>En la segunda pregunta</u> 30 estudiantes de los 56, usaron el registro analítico para dar acertadamente su respuesta y la identificaron con el tipo de función. En 19 casos los estudiantes simplemente referencian un tipo de función pero sin asociarle ninguna expresión algebraica. El resto o no responde o escribe una ecuación en la forma $y = f(x)$, sin mencionar el tipo de ecuación a la que corresponde.

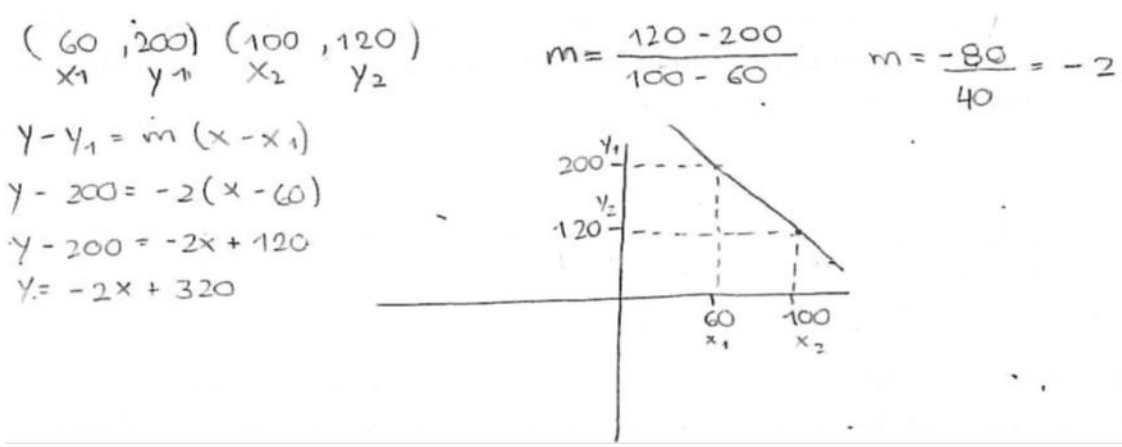


<u>Estudiante A2</u>. Se observa uso de representación verbal como el simbólico, sin embargo hay dificultades en la interpretación de la función raíz cuadrada.



<u>Estudiante B2</u>. Podemos notar el uso de la notación funcional, pero no asocia el nombre a la función como en el caso del estudiante identificado como A2.

<u>En la tercera pregunta</u> la actividad articula tres tipos de registros, la gran mayoría logró cierta efectividad en la articulación de los registros gráficos y analíticos. Dejan de lado el tabular; solo uno usó correctamente la articulación de los tres registros presentes. Otro pequeño grupo articuló el gráfico y el tabular. En unos cinco casos la respuesta fue vaga.



Estudiante C. Se observa el uso de distintos registros, para ilustrar y apoyar sus ideas. No hace uso del registro tabular.

<u>En las respuestas a la pregunta cuatro</u> del cuestionario, se hallaron 19 respuestas acertadas. Existe confusión con el concepto de variable y el de valor numérico, respondieron con valores numéricos para referirse a variable independiente y dependiente.

x = Cantidades = Dependiente

y = Precio = Independiente

Los x es la variable dependiente porque dependen del precio

Estudiante F. Se observa claridad en la conceptualización de variable independiente y dependiente.

<u>En las respuestas a la pregunta cinco</u>, la mayoría utilizó el registro de representación verbal. Hubo 22 casos que evidenciaron desconocer el concepto de dominio de una función. Los más cercanos explican el concepto pensado en funciones de tipo racional y enfatizan en el propósito de que el denominador no se anule. La pregunta les pareció ambigua. Un grupo pequeño cree necesario conocer la gráfica de la función en todo momento para poder establecer el dominio.

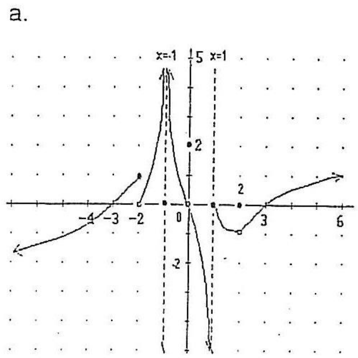
- El Dominio es el recorrido que se hace de Izquierda a derecha en el eje de las x.
- se requiere conocer si dicha función tiene restricciones, una de ellas es la división por cero

Estudiante G. Se observa poca claridad en el manejo del concepto de función.

Hacer la grafica, Saber los valores de x.

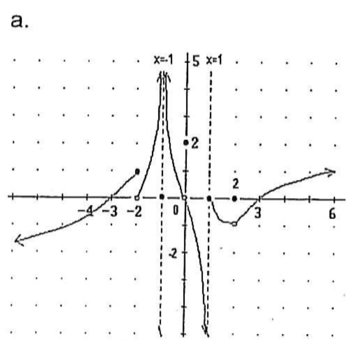
Estudiante H. Muestra que se debe conocer la gráfica, aun así es poco preciso en la forma de explicar el concepto de función.

<u>En la pregunta 6a)</u> era indispensable articular los registros tabular y gráficos. 30 estudiantes asociaron de manera imprecisa la tabla de valores a la gráfica establecida; otro grupo pequeño parece no ver la relación entre los pares ordenados y el cómo expresarla en una tabla de valores.



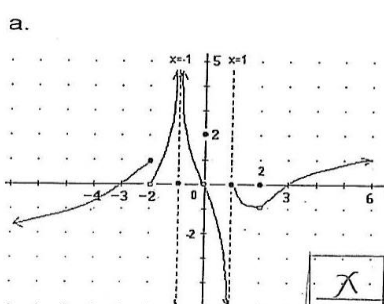
No se hacen tablas de valores en el Curso.

Estudiante I. Llama la atención, que el estudiante señale que en el curso no se hace uso del Registro Tabular.



$$f(x) = \begin{cases} -1 & -2 \leq x > 2 \\ 0 & \text{si } -1 < x > 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \geq 2 \end{cases}$$

Estudiante I2. Vemos que no hay claridad entre lo que se responde y lo que se pregunta.

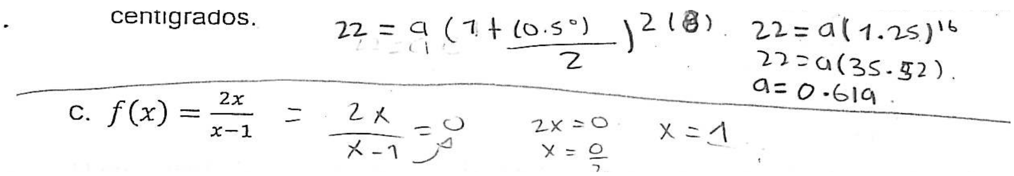


X	-2	2	3	6	-4
Y	0	-1	0	1	-1

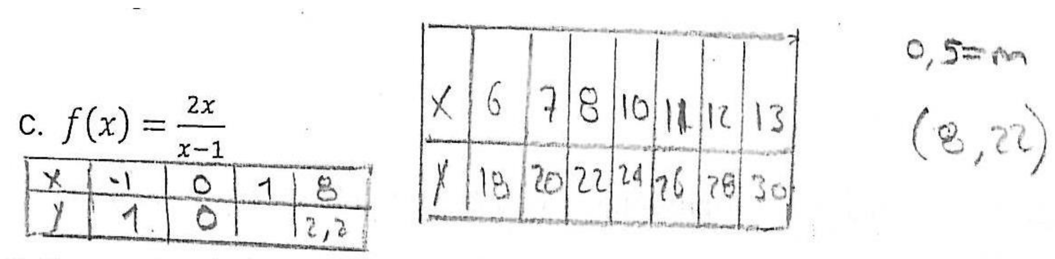
X	0	1	2	4	6	8
Y	19.5°	20°	20.5°	21°	21.5°	22°

Estudiante I3. Este estudiante a diferencia de los dos anteriores, realizó un esfuerzo importante en la construcción de la tabla de valores y la articulación con el registro grafical.

<u>La pregunta 6b)</u> articula los registros verbal y tabular. 29 estudiantes de los 56 lograron establecerla. No fueron los mismos 30 de la respuesta anterior, es decir, no todos quienes establecieron la tabla de valores en el ejercicio anterior, lo logró en esta parte.



Estudiante J.



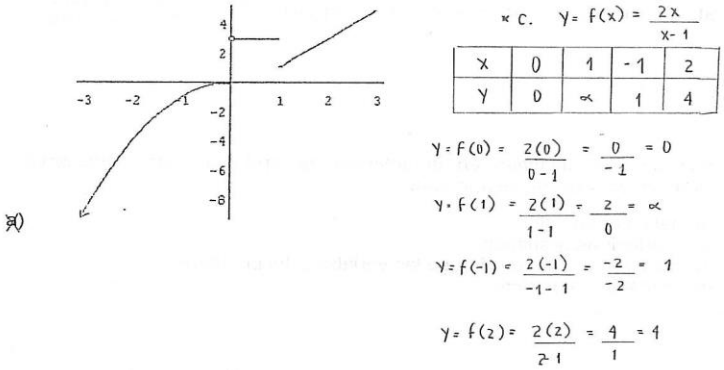
Estudiante J2.

Los ejemplos mostrados que suministran los estudiantes J y J2, deja bien claro que algunos estudiantes cuenta con herramientas para abordar de una manera más o menos aproximada al concepto de función a partir de los registros (estudiante J2) y otros (estudiante J) manejan ideas distorsionadas del concepto.

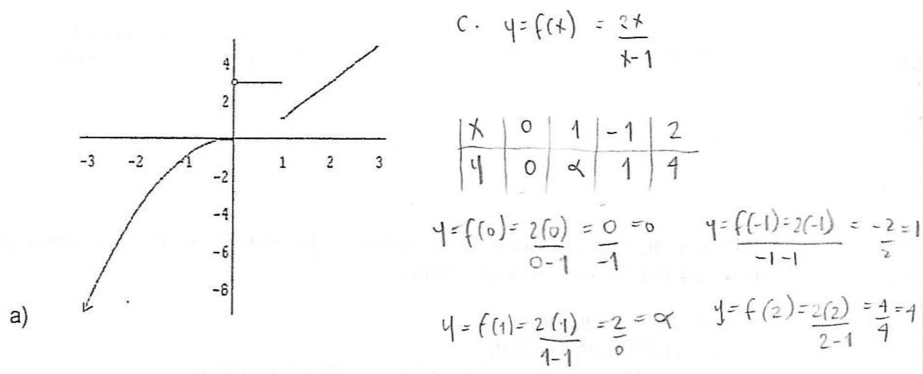
<u>En la pregunta 6 c)</u> se articulan los registros analítico, tabular y numérico. Veinte realizaron la tabla; los otros no establecieron ningún tipo de conexión con la expresión de la función dada.

En la pregunta 7, la gran mayoría que respondió a las tres gráficas acertó las respuestas. Usaron el criterio de la línea vertical para sustentar su respuesta. En este caso, la pregunta fue muy abierta, lo que da entrada a aciertos por azar. Es recomendable solicitar una justificación de la respuesta.

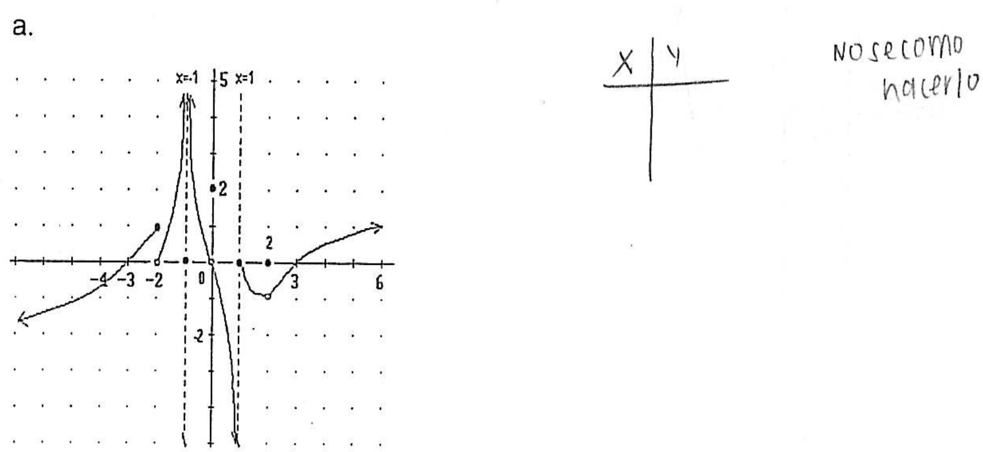
En las respuestas se aprecia un inadecuado manejo del concepto de función. El registro grafical de la pregunta permite identificar los aspectos deficientes de contextualización de concepto de función.



Estudiante K. Este estudiante maneja un cierto orden que permite, ver hasta qué punto se ha apropiado del concepto de función.



Estudiante K2. Al igual que el estudiante denominado K, hay indicios del manejo de los registros gráficos, tabular, simbólico y analítico.



Estudiante K3. El estudiante, en este caso como podemos observar, honestamente señala no saber cómo responder al interrogante planteado.

<u>En las respuestas obtenidas en la pregunta 8</u>, solo 17 estudiantes de los 56, lograron acertar sus tres respuestas. Fueron coherentes con la respuesta anterior; establecieron el vínculo entre los registros grafical y simbólico. Una minoría de estas respuestas, evidencia la dificultad de algunos estudiantes con la comprensión de las funciones a trozos o definidas por trozos. En algunas situaciones, el estudiante reconoce la función valor absoluto como función pero no la vincula en la pregunta siguiente y viceversa.

En el resto de las respuestas, en su mayoría no identificaron como función, la función a trozos; solo dos acertaron. Adicionalmente, algunos incluyeron la circunferencia como una función. En esta última situación, al colocar la ecuación de la circunferencia dentro del grupo de funciones, se puede concluir que no identificaron esta ecuación, ya que de hacerlo y pensar en su representación gráfica, la hubieran descartado.

<u>La pregunta nueve</u> en la forma como se presenta, puede tener más de una respuesta, inclusive todas son totalmente válidas; dentro de las opciones de respuesta, se debió colocar 'todas las anteriores'. Pero es útil conocer las distintas opciones que tenían los estudiantes.

<u>PREGUNTA 9</u>: El uso de las funciones en la solución de problemas de economía o administración se hace necesario para:

- Calcular un valor.
- Predecir un resultado.
- Establecer una relación de las variables del problema.
- Construir un gráfico

En la tabla N° 9, que se da a continuación, se discriminan las respuestas seleccionadas.

Tabla3.1.4.3 . Respuestas a la pregunta 9

Alternativas	a)	b)	c)	d)	Múltiples Respuestas	Todas	No responde
Estudiantes	15	13	18	1	4	1	4

Fuente: Autor

Cuatro estudiante dieron múltiples respuestas, donde combinan varias de las alternativas y un solo estudiante escribió textualmente: “todas las anteriores” y marcó todas las opciones. Al revisar este último caso y viendo las respuestas dadas por este estudiante a lo largo del cuestionario, se observa coherencia y claridad en el uso de los distintos registros de representación semiótica.

La respuesta a la pregunta 10), con cinco opciones, se recoge en la Tabla N° 3.4.

Tabla 3.4 Frecuencia de respuestas a la pregunta 10

Preguntas. / N° respuestas	Nunca	Esporádicamente	Frecuentemente	Siempre	No responde.
10. En los enunciados de problemas de matemáticas que se resuelven en el curso de cálculo diferencial:	----	-----	-----	----	-----
1. Hay expresiones algebraicas que representan funciones	2	5	28	20	1
2. Es fácil reconocer la función que se va a estudiar.	0	5	38	11	2
3. Hay gráficos que representan funciones.	1	5	30	19	1
4. Los enunciados de los problemas se pueden escribir en términos de una función.	0	8	31	16	1
5. Hay datos para poder conocer la función algebraicamente.	0	9	19	24	3

Fuente: Autor

En estos resultados se aprecia que en los ítems del 1 al 4, más del 50% de los estudiantes opinan, que identifican frecuentemente las expresiones algebraicas, así como las funciones y la representación gráfica de ellas, dentro de los enunciados de los problemas.

Respecto al ítem 5, es compartida la opinión, acerca del reconocimiento de datos que permitan conocer la función a través de un registro algebraico. El 33,5% de la muestra opina que frecuentemente se pueden identificar estos datos. El 42,8% de la muestra opina que siempre aparecen los datos suficientes para la representación de la función algebraicamente.

Las preguntas 11), 12) y 13) son de características similares a la 10) y su análisis es análogo.

Tabla 3. 5. Frecuencia de respuestas a la pregunta 11

Preguntas. / N° respuestas	Nunca	Esporádicamente	Frecuentemente	Siempre	No responde
11.Para la solución de problemas presentados en un curso de cálculo se hace uso de:	----	-----	-----	----	-----
1. Funciones representadas gráficamente.	0	9	32	14	1
2. Funciones dadas verbalmente.	19	19	16	1	1
3. Funciones presentadas algebráicamente.	0	1	25	29	1
4. Funciones dadas numéricamente (en tabla de datos).	7	30	15	3	1

Fuente: Autor

Observamos en la Tabla N° 3.5, que el 57% de los estudiantes opina que en un problema planteado en el curso de cálculo, con frecuencia se puede solucionar con un razonamiento basado en representaciones gráficas.

En cuanto al uso de un tipo de representación verbal, la opinión es más equilibrada, ya que, el 34% piensa que no existe ninguna relación al respecto; igualmente, el otro 34% opina que esporádicamente tiene algún tipo de relación; y solo el 25% opina que frecuentemente un problema se puede abordar desde las funciones y sus representaciones verbales.

Con relación al uso de representaciones algebraicas, el 45% dice que con frecuencia este tipo de representaciones conduce a la solución del problema y un 52% piensa que este razonamiento es necesario siempre para llegar a la solución.

En cuanto al papel de la representación tabular, una mayoría opina que esporádicamente guarda relación con la solución y un 24% piensa que frecuentemente sí ayuda la tabla de valores.
En resumen, los estudiantes privilegian la representación gráfica y algebraica como una primera opción; y, en segundo plano, queda la representación tabular, como una herramienta complementaria; dejan, en una tercera instancia, la representación verbal.

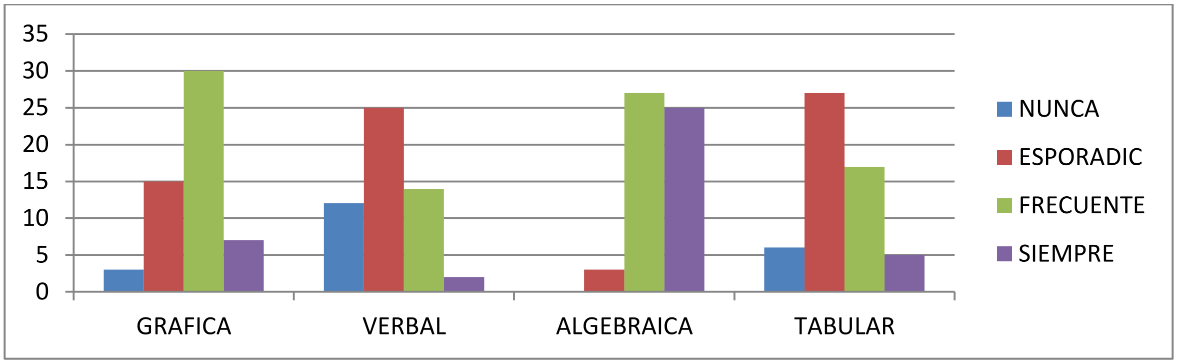
Tabla 3.6. Frecuencia de respuestas a la pregunta 12

Preguntas. / N° respuestas	Nunca	Esporádicamente	Frecuentemente	Siempre	No resp.
12.Usted resuelve problemas de cálculo donde le den la función:	----	-----	-----	----	-----
1. Representada gráficamente.	3	15	30	7	1
2. Verbalmente	14	25	14	2	1
3.Algebraicamente	0	3	27	25	1
4.Numéricamente (en tabla de datos)	6	27	17	5	1

Fuente: Autor

En el Gráfico N° 3.1 se evidencia la predominancia del registro gráfico

Grafica 3.1. Problemas de cálculo y la predominancia de un registro de representación sobre otro. Histograma de Frecuencia vs. Representación Semiótica



Fuente: Autor

En la siguiente tabla se recogen los datos de las respuestas de frecuencia a la pregunta 13), asociados a la resolución de problemas de cálculo.

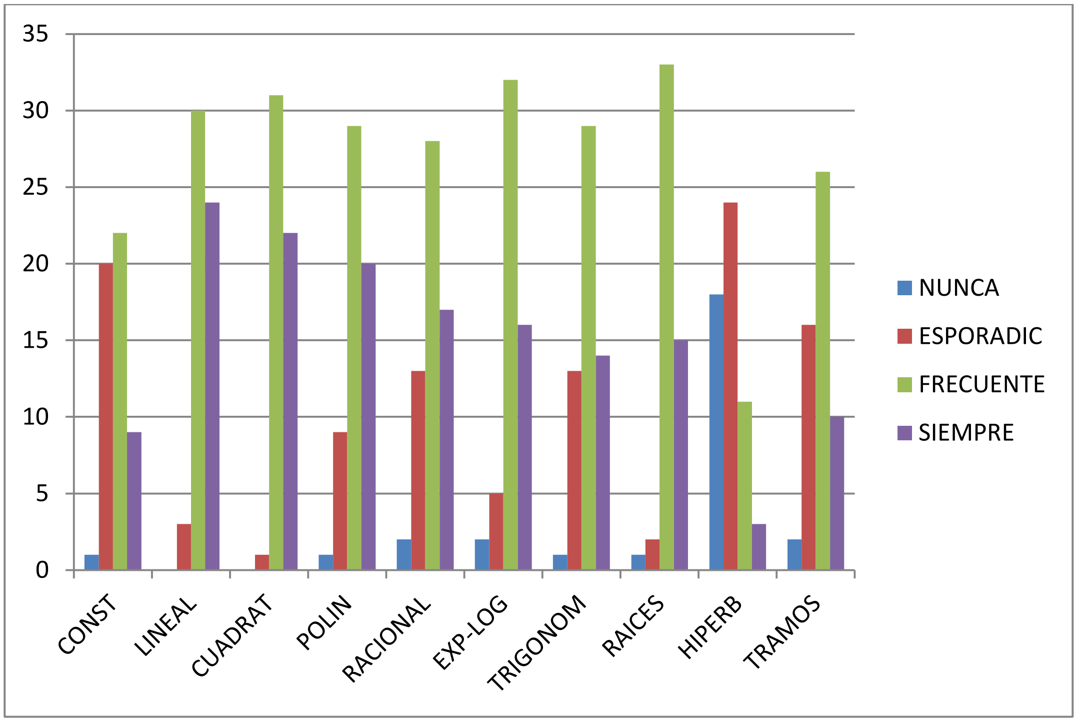
Tabla 3.7. Frecuencia de respuestas a la pregunta 13

13. Las funciones que normalmente se usan para resolver problemas del cálculo son:	NUNCA	ESPORADICAMENTE	FRECUENTEMENTE	SIEMPRE
Constantes	1	20	22	9
Lineales		3	30	24
Cuadráticas		1	31	22
Polinómicas	1	9	29	20
Racionales	2	13	28	17
Exponenciales y Logarítmicas	2	5	32	16
Trigonométricas y sus Inversas	1	13	29	14
Raíces (Raíz cuadrada, cubica, etc.)	1	2	33	15
Funciones hiperbólicas	18	24	11	3
Funciones por tramos	2	16	26	10

Fuente: Autor

Para un mejor análisis de resultados de la tabla anterior, este comportamiento se grafica a continuación.

Grafica 3. 1. Funciones más usada en la resolución de problemas de cálculo. Histograma de Frecuencia del tipo de funciones.



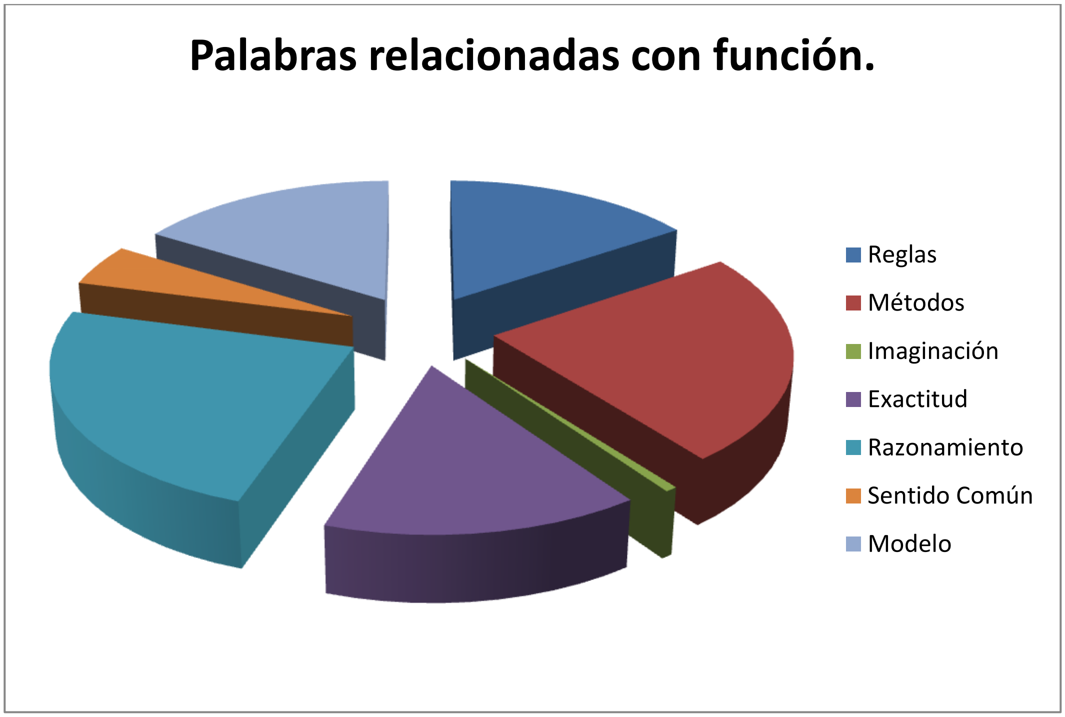
Fuente: Autor

Más del 50% de los estudiantes frecuentemente usan todas las funciones para resolver un problema de cálculo, a excepción de la constante y las hiperbólicas. Las funciones irracionales conjuntamente con la exponencial y logarítmica son las más usadas.

En cuanto a la respuesta obtenida en la pregunta 14, referida a tres palabras asociadas con las funciones matemáticas, tenemos el siguiente gráfico para analizar las respuestas. Es de comentar que aun cuando se indicaba que solo escogieran tres palabras, cuatro estudiantes escogieron más de tres palabras; una persona escogió solo una palabra; otra solo tomó dos y solo una no respondió.

La tripleta de palabras que más opiniones tuvo fue: reglas-métodos- razonamientos; la segunda, reglas-razonamiento-modelo.

Grafica 3.3. Palabras los estudiantes asocian más con funciones



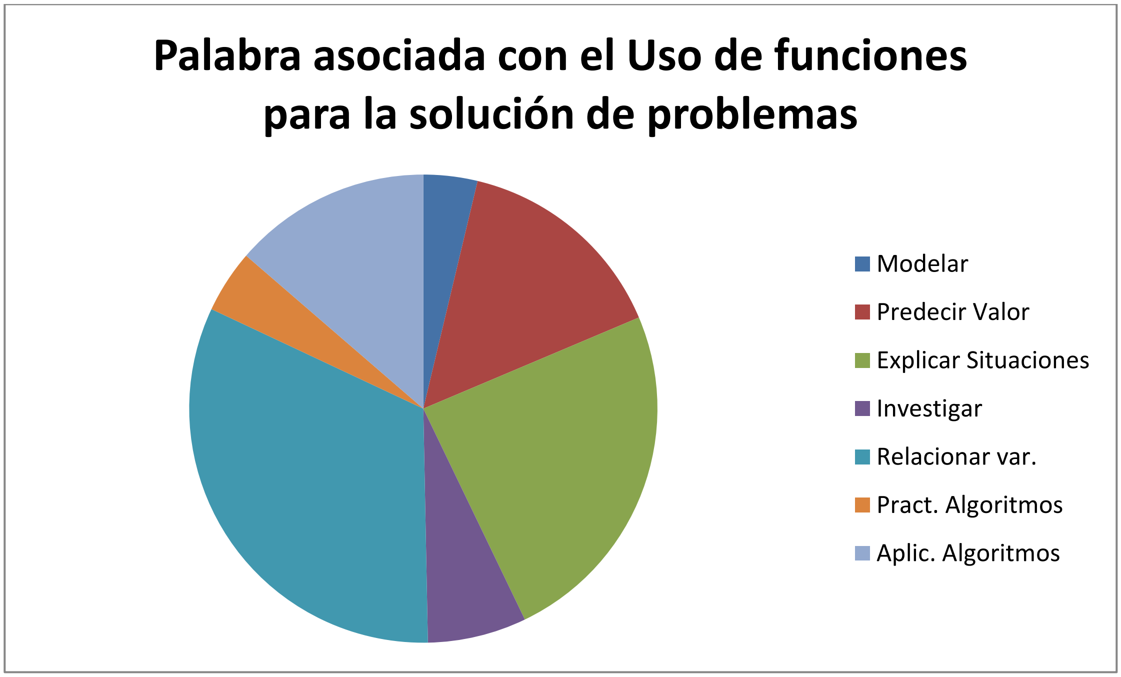
Fuente: Autor

Predominan los colores rojo oscuro y azul turquesa, que corresponde a Métodos y Razonamiento, 40 vinculaciones (31.50%); en color azul grisáceo, que corresponde a la palabra Modelo, se tienen 27 vinculaciones (21.25%); le sigue el azul oscuro de Reglas, con 26 (20.47%); viene después Exactitud de color violeta con 25 (19.70%); finalmente, Sentido Común en color ladrillo con 8 (6.30%) e Imaginación en color verde con una (0.78%).

Asimismo, para las respuesta a la pregunta 15), que comparte la misma naturaleza de la 14), se realizó un análisis similar. Es de observar que dos estudiantes marcaron más de tres opciones; dos, marcaron una; tres, escogieron tres; el estudiante que no responde la pregunta catorce deja en blanco la 15).

En el siguiente gráfico N° 4, se muestra las proporciones de frecuencia de respuesta que se tienen en cada una de las opciones de la pregunta 15).

Grafica 3.4. Palabras que se asocian más con funciones para la solución de problemas



Fuente: Autor

Vemos el predominio del color azul turquesa en comparación con los otros colores. Este representa la vinculación del concepto de función con, resolver parcial o totalmente el problema.

En resumen se muestran los porcentajes de respuesta obtenidas en esta pregunta: Modelar 6 para un 3.72 %, Predecir Valor con una frecuencia de 24 para un 14.90% , Explicar situaciones con una frecuencia de 39 para un 24.22%, Investigar con 11 y un porcentaje de 6.83%, Relacionar variable con frecuencia de 52, la más alta con un porcentaje de 32.30%, practicar algoritmos con 7 y un porcentaje asociado de 4.34% y finalmente Aplicar Algoritmos con 22 para un porcentaje de 13.70%.

3.2.6 ASPECTOS TEORICOS EN CONTRASTE CON LOS RESULTADOS DEL CUESTIONARIO

Según Duval (2004) hay al menos dos características de la actividad cognitiva implicada en el estudio de las matemáticas. Por una parte, se recurre a varios registros de representación semiótica y por otra los objetos no son accesibles mediante la percepción, como ocurre con la mayoría de los objetos en las otras disciplinas.

Una estrategia matemática combina generalmente tratamientos y conversiones, la diferenciación funcional de registros de representación y la coordinación entre ellos constituye los dos puntos clave para el aprendizaje. (Guzmán, 1998).

Según Duval, para comprender la producción de las representaciones semióticas hay que tomar en cuenta tres aspectos: El aspecto estructural relativo a la determinación de la significación de los signos y de las posibilidades de representación que ofrecen; el aspecto fenomenológico relativo a las exigencias psicológicas de producción o de aprehensión de los signos y el aspecto funcional relativo al tipo de actividad que los signos permiten llevar a cabo.

Las respuestas de los estudiantes a las preguntas 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8: tenemos que 23 de 56 estudiantes no superaron la prueba estructural, 10 estudiantes no superaron el aspecto fenomenológico, 36 estudiantes no dominaron el aspecto funcional.

Con relación a las preguntas y debido a la dificultad de acceso a las creencias a través de manifestaciones, anteriormente comentada, dos aspectos adquieren especial importancia: La tipología de las preguntas y el papel del estudiante.

En cuanto al papel que se pide que juegue el estudiante en las distintas preguntas del cuestionario, las posibilidades son múltiples: preguntas de opinión/percepción, visión propia. (Villa Cortes, 2005).

3.2.7 TRABAJO DE CAMPO Y ANALISIS

Consideramos los siguientes registros: gráfico, algebraico y de lenguaje español. Verificamos su presencia en las respuestas de los estudiantes de las carreras de Ciencias Económicas de la Universidad de Medellín en el período lectivo 2012-2, respecto a nociones relativas a las funciones reales y al sentido de éstas.

Un cuestionario de 15 preguntas fue aplicado a 56 estudiantes que habían tomado un curso de Cálculo Diferencial de la Universidad (de 17 a 20 años). A continuación examinaremos algunas preguntas y sus respectivas respuestas.
Las preguntas son conceptuales, se refieren a la función, clases de funciones, uso de las funciones, etc.
Son relativamente sencillas, son las más habituales en los cursos para responder al propósito del estudio.

El análisis se hará por pregunta y en términos de los registros involucrados.

Pregunta 1

Si tuvieras que explicar que es función matemática, a alguien que no lo sabe, ¿Cómo se lo explicarías para que lo entienda fácilmente?

Esta es una pregunta abierta, formulada en el registro de lenguaje natural que permite recoger el conocimiento que ha interiorizado el estudiante, las representaciones del concepto de función, cuales registros pone en juego y en qué medida los conocimientos matemáticos de los estudiantes se aplican como saberes especializados o pasan a formar parte de su saber cultural.

- Obtuvimos 37 ejemplos aceptables.
- Una clase de respuestas (33 estudiantes) recurre al lenguaje natural.
- De los 33 estudiantes, 20 se apoyan en un gráfico.
- De los 33 estudiantes, 4 se apoyan en un gráfico y en un ejemplo.
- 4 estudiantes se apoyan en lenguaje algebraico.

Estos estudiantes intentan dar explicaciones tomando en cuenta la teoría, con alguna visualización.

Las respuestas anteriores muestran que los estudiantes no aplican satisfactoriamente el concepto de función tratado en clases.

Una posible explicación podría ser que en clases se descuida el vocabulario y la discriminación entre las unidades pertenecientes a registros distintos.

Esto no está referido al rigor del lenguaje matemático sino a la necesidad de distinguir las representaciones de los objetos representados, distinción que mejoraría la expresión de los estudiantes y la redacción de sus respuestas.

En general las respuestas analizadas muestran deficiencias conceptuales y falta de coordinación entre los registros algebraicos, gráfica y lenguaje natural. Esto es una posible consecuencia de la enseñanza recibida por los estudiantes. La preparación es insuficiente en este tipo de tareas. Esto requiere aprendizaje, no surgen como acciones espontáneas del estudiante.

De los 20 estudiantes que se apoyan en un gráfico, 12 utilizan el plano cartesiano y 8 el diagrama sagital, describen un lenguaje natural, sin precisión y apelan a lo que leen en la representación gráfica de la función.

La lectura de estas respuestas puede provocar distintas reacciones y preguntas que pueden pasar por el filtro de las creencias de los estudiantes sobre las matemáticas, y también pueda confrontarlos con sus prácticas.

Diez estudiantes presentaron confusiones serias entre variables, ecuaciones y signos matemáticos y dos estudiantes manifestaron no tener los elementos para responder.
Lo anterior nos abre un espacio para evaluar el abanico de creencias, concepciones y manejo de signos sobre las matemáticas para detectar los vacíos de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas, empezando por las habilidades de los profesores para introducir el aprendizaje cooperativo en su clase y para implementar y diseñar el estudio de la función con los usos reales de la función, para ayudar al estudiante en discusiones abiertas sobre la manera de hacer cambiar las creencias y mejorar la enseñanza del concepto de función.

Lappan y Theule Lubinski (1992) citado por Flores (1995) destacan tres campos de conocimientos y de creencias que conviene explorar y son: Conocimiento y creencias sobre la pedagogía de las matemáticas y conocimiento y creencias sobre los estudiantes.

En la segunda pregunta se invita al estudiante a dar cuatro ejemplos de función matemática.

- Es una pregunta de carácter abierta, indirecta y analítica.
- Treinta estudiantes apelaron al registro analítico.
- Diecinueve estudiantes hicieron referencia a un tipo de función pero sin sustentar su ejemplo con una expresión algebraica.
- Siete no responden, no escriben acertadamente sus ejemplos.

En este caso se muestran las dificultades que se presentan a los estudiantes en cuanto al aprendizaje de las funciones y de presentar con solvencia modelos de funciones, las cuales están relacionadas en primer lugar con el enfoque distanciado del análisis de la variabilidad y de fenómenos sujetos a cambio, sin considerar sus orígenes epistemológicos, en segundo lugar con los procesos algorítmicos que conllevan a considerar una función como una fórmula mecánica, a construir tablas sin significado, a hallar dominios como un simple requisito, o a graficar sin interpretar y en tercer lugar con la carencia de una herramienta que amplíe la capacidad de visión, de precisión, de representación y traducción de una a otra.

En segundo lugar (Duval, 2004), plantea un reto fundamental, en tanto que asume que la enseñanza de las matemáticas ha de contribuir al desarrollo de las capacidades de razonamiento, de análisis y de visualización de los estudiantes.

Plantea que el acceso a los conocimientos matemáticos requiere de la integración, en esta "arquitectura cognitiva" de los sistemas semióticos de representación que han permitido descubrir y estudiar los objetos matemáticos que ahora se enseñan: no sólo los primeros números enteros, sino también los decimales, los racionales, las funciones, las relaciones geométricas entre los elementos, que determinan las configuraciones espaciales. Estos sistemas, cuya elaboración ha sido históricamente lenta, son tan necesarios para el desarrollo del pensamiento matemático, como la innovación y el perfeccionamiento de instrumentos de óptica o de medida de otras disciplinas científicas.

La mediación semiótica es tan indispensable en matemáticas como la mediación instrumental para la observación de los fenómenos, donde los individuos deben apropiárselo, así como todos los otros grandes logros, culturales como la lengua, la escritura. Esto constituye el reto de los aprendizajes fundamentales en el marco de la escolarización.

Para un buen desarrollo del aprendizaje y el pensamiento matemático es conveniente que el estudiante realice conversiones en distintos registros, estableciendo la correcta coordinación entre los mismos. También es importante que diferencien correctamente los distintos registros de representación y puedan utilizar conceptos y propiedades matemáticas involucrados en la temática de función. (Duval, 2004).

El contenido de esta pregunta pone de manifiesto la relevancia que adquieren las funciones como herramienta para representar situaciones de la vida real.

Por lo tanto tendremos en cuenta los siguientes registros de representación:

- Registro verbal: Cuando el lenguaje común es el que se utiliza para representar situaciones del mundo real.
- Registro analítico: Cuando se hace referencia a la definición de algún concepto mediante una expresión algebraica.
- Registro simbólico: Cuando la definición de un concepto mediante expresiones simbólicas sustentadas por las reglas de la lógica formal.
- Registro gráfico: Cuando se expresa mediante una figura.

En la pregunta número ocho se plantea:

¿Cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son funciones? Márcalas con una x.

a) $y = 2x + 3$

b) $x^2 + y^2 = 4$

c) $r(x) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } x \in Q \text{ (racionales)} \\ 1 \text{ si } x \in i \text{ (irracionales)} \end{array} \right\}$

d) $y = | x |$

e) $x^2/2 - y^2/4 - 12 = 0$

- Es una pregunta abierta directa de representación algebraica.
- En esta pregunta exploramos creencias, conocimientos epistemológicos, capacidad de análisis en temas de álgebra, geometría analítica, trigonometría, y cálculo diferencial.
- 17 de los 56 estudiantes acertaron en sus respuestas, es decir, sólo el 25% de la muestra establecieron un vínculo entre los registros gráficos y simbólicos.
- El 75% restante evidencia la dificultad para comprensión lectora, aprehensión del concepto de función, así como un problema de enseñanza/aprendizaje.

Ésta pregunta nos motiva a seguir investigando sobre los problemas que enfrenta la enseñanza de las matemáticas, principalmente en el nivel del bachillerato en donde según (Duval, 2004), van por una vía muy distinta: Los alumnos o más exactamente el funcionamiento cognitivo subyacente a la diversidad de temas matemáticos que se ponen en juego, que en realidad es lo que está en primer lugar mucho antes que los contenidos. No es saber sobre cuales contenidos enseñar y de qué manera introducirlos en clase, sino también analizar las razones estructurales de los problemas de comprensión con los cuales se enfrentan la mayoría de los alumnos de todos los niveles de enseñanza.

Lo que emerge a la conciencia resulta del funcionamiento de los diferentes sistemas cognitivos que constituyen la arquitectura cognitiva del sujeto, y refleja el grado de coordinación funcional existente entre esos diferentes sistemas. La arquitectura cognitiva subyacente, la cual determina la capacidad de reconocimiento inmediato así como los tratamientos espontáneos. (Duval, 2005).
Ahora bien a pesar del fracaso del modelo piagetiano para esclarecer los problemas de aprendizaje de las matemáticas a partir de la educación en bachillerato, se ha mantenido la idea de que los problemas de aprendizaje están ligados a la complejidad propia de cada una de las nociones

matemáticas de enseñar, lo cual evidentemente, lleva a una enorme lista de problemas de aprendizaje que debe enfrentar el estudiante (Duval, 2004).

La aproximación cognitiva no busca plantear los problemas de aprendizaje partiendo directamente de las dificultades encontradas en los alumnos. Busca en primer lugar determinar los modos de funcionamiento cognitivo necesarios para la producción de una actividad matemática, es decir necesarios para la compresión o direccionamiento de los conocimientos matemáticos que se proponen a los estudiantes o lo que se espera que ellos pongan en marcha.

Esta es una cuestión decisiva que sin embargo, nunca se señala, o que, cuando se hace, con frecuencia se descara en razón de una convicción muy difundida: El desarrollo de las matemáticas se inscribe en el desarrollo natural de la actividad del pensamiento y en la manifestación más universal y por tanto más accesible a todos. Convicción según la cual, la movilización de las estructuras intelectuales que se ponen en juego de manera natural con el desarrollo del niño o adolescente, debería bastar para asegurar los funcionamientos cognitivos necesarios para una actividad matemática, como se supone en la primera aproximación. O como se supone en la segunda, si se proponen "buenas situaciones de actividad matemática, los alumnos deberían apropiarse espontáneamente de funcionamientos cognitivos en virtud de los mecanismos de adaptación constructivista. Por una u otras vías, sería inútil querer buscar funcionamientos cognitivos específicos que pudiesen distinguirse ya sea de las estructuras comunes de la inteligencia o bien de los contenidos matemáticos enseñados.

3.2.8 EVALUACIÓN DE RESULTADOS POR OBJETIVOS

A continuación en la Tabla N° 14, se describe en la primera columna el objetivo de cada pregunta y en la segunda columna el nivel de logro. Esto permite conocer hasta qué punto hubo claridad por parte del estudiante en la respuesta que dieron y lo que se esperaba corroborar en dicha interrogante. De allí como observaremos se obtuvieron unas categorías que permiten sintetizar el objetivo de la misma pregunta.

Tabla 3.8. Síntesis de las respuestas a las preguntas del cuestionario.

Propósito de cada pregunta y Categoría donde se ubica	**Nivel de logro del objetivo de la pregunta**
Indagar sobre el conocimiento del estudiante sobre función y la forma de comunicarlo. CATEGORÍA **: Indagar, Conocer, Relacionar**	Encontramos en la respuesta a esta pregunta que se logró el objetivo en un porcentaje muy alto. Se puede apreciar la gran dificultad que tuvo este grupo de estudiantes en explicar y mostrar con argumentos válidos la forma como se han apropiado del concepto de función. Es de destacar los diversos intentos de utilizar alguno de los registros de representación semiótica. Los que acertaron se apoyaron en el Registro Figural; otros, un poco imprecisos, con Representación Verbal, lenguaje natural en combinación con un Registro Analítico
2) Indagar mediante ejemplos concretos la pertinencia del concepto de función que maneja el estudiante. CATEGORÍA **: Indagar, Conocer, Relacionar**	Se logró el objetivo. La gran mayoría pudo identificar con ejemplos concretos función constante, lineal, cuadrática, etc. Ellos hicieron uso del Registro Analítico para apoyar su respuesta. Otros recordaron el nombre pero sin poder asociar una ecuación; esto tal vez obedece a lo abierta de la pregunta: “Escribe cuatro ejemplos de funciones matemáticas”. Otros escribieron las representaciones, más no el nombre de las mismas. Se evidencia en las respuestas obtenidas una inclinación por los registros de tipo algebraico y Analítico para avalar su respuesta.
Capacidad interpretativa de enunciados y capacidad de representar el concepto de funciones de diversas maneras (algebraicamente). CATEGORÍA**: Capacidad de Interpretar y Diferenciar**	Se logró el objetivo. La actividad articula tres tipos de registros. La mayoría logró con cierta efectividad solo la articulación de dos registros: Registros Grafical y Analítico, o Registro Grafical y Tabular. Es de notar que la capacidad interpretativa es algo limitada ya que solo un estudiante logró articular los tres registros, como se pretendía; inexplicablemente, a pesar de la validez de sus razonamientos se “olvidaron” de alguno de los dos registros. En líneas generales, manejan hasta cierto punto la parte operacional y el poder dar respuesta al ejercicio con algún grado de efectividad.
Capacidad de diferenciar las variables de la función (y su	Se logró el objetivo. Existe confusión seria a la hora de diferenciar variable, variable independiente y variable dependiente. Muchos

representación en una ecuación). CATEGORÍA **: Indagar, Conocer, Relacionar**	identificaron los valores numéricos usados en la respuesta anterior como algún tipo de variable.
Conocimiento que tiene el estudiante sobre el concepto dominio de función y la manera de encontrarlo. CATEGORÍA **: Indagar, Conocer, Relacionar**	Se logró el objetivo. Se determinó qué herramientas usan para decidir a partir de una función dada cuando esta es función. La mayoría trato de dar la explicación, haciendo uso del registro de representación verbal. Los más acertados explican el concepto pensado en algún tipo de función particular. Pero se observa que es un concepto que se les hace difícil de explicar, aun cuando lo puedan ilustrar con una situación específica.
Pasar de una forma de representación a otra (en diferentes situaciones) CATEGORIA: **Conversión de Registros**	Se logró nuevamente el objetivo. Existen dificultades en unos pocos para precisar y poder pasar de un registro de representación a otro.
7) Reconocer funciones gráficamente (e identificar el manejo de la simbología en dicha representación) CATEGORÍA **: Indagar, Conocer, Relacionar**	Se logró el objetivo de la pregunta, ya que en algunos casos los estudiantes usando el criterio de la recta vertical, reconocieron las funciones. Quedan dudas en cuanto al uso de este criterio en el caso de las llamadas funciones a trozos.
Identificar criterios para reconocer funciones expresadas algebraicamente CATEGORÍA **: Indagar, Conocer, Relacionar**	Se logró el objetivo de la pregunta. Se pudo identificar más que criterios, dificultades importantes en el reconocimiento de las funciones cuando éstas son formuladas algebraicamente. En cuanto a los criterios que manejan, no hay evidencia en las respuestas de su razonamiento; muchas, tal vez, obedecen a recordar su familiarización con ellas.
Determinar la creencia que el estudiante, tiene sobre la esencia de las funciones, su aplicación y operatividad en un contexto social cotidiano. CATEGORÍA **: Creencias sobre**	Se logró el objetivo. Un tercio de los encuestados opina que la esencia de las funciones dentro de su disciplina es establecer relaciones entre las variables del problema. Otro grupo considera que permite calcular un valor dentro de la dinámica del problema y una minoría, no despreciable asegura que permite calcular un valor.

aplicabilidad y uso.	
Detectar en el estudiante la creencia que tiene sobre los enunciados de problemas y su relación con la función. CATEGORÍA: Creencias Sobre Aplicabilidad y uso	Se logró el objetivo. La información proporcionada indica que identifican con frecuencia, las expresiones algebraicas, así como las funciones y sus representaciones dentro de los enunciados de los problemas.
Determinar la creencia que tiene el estudiante, sobre la importancia de la representación de función en la solución de problemas. CATEGORÍA: Creencias Sobre Aplicabilidad y uso	Se logró el objetivo. La información aportada permite precisar en qué porcentaje los estudiantes le dan importancia a las funciones y sus distintas formas de representación en la resolución de problemas.
Creencias sobre la posible solución de los problemas dependiendo de la representación de la función. CATEGORÍA: Creencias Sobre Aplicabilidad y uso	Se logró el objetivo. Se cree que las representaciones de tipo algebraica y gráfica, favorecen la solución de un problema.
Detectar creencias sobre tipos de funciones que se usan en problemas de contexto de la economía y la administración. CATEGORÍA: Creencias Sobre Aplicabilidad y uso	Aun cuando se logró el objetivo de la pregunta, la información recogida a partir de los datos suministrados por los estudiantes, se observa que no tienen claridad acerca de las funciones que revisten mayor relevancia en su disciplina son: Funciones Lineales. Funciones Cuadráticas. Función Exponencial y Logarítmica. Dentro de la opinión de la gran mayoría, casi todas revisten la misma importancia en el contexto de la economía y la administración.
Determinar la creencia que se establece entre función y cada uno de los conceptos presentados en la pregunta.	Se logró el objetivo de la pregunta. Queda establecida de esta forma, que las palabras que vinculan la función matemática, con otros conceptos son ‘métodos, razonamiento y modelo’.

CATEGORÍA: Creencias Sobre Aplicabilidad y uso	
Averiguar sobre la creencia del uso de funciones en solución de problemas CATEGORÍA: Creencias Sobre Aplicabilidad y uso	Se logró el objetivo de la pregunta. Consideran que el uso de función en la solución de problemas está fuertemente vinculado a relacionar variables y explicar situaciones. Un porcentaje no pequeño opinó que permite predecir valores.

Fuente: Autor

Tabla 3.9. Cuadro de respuesta de acuerdo a las categorías

Categorías	**Nº de personas**	**Porcentaje (%)**
Estudiantes que explican de manera "clara" o haciendo uso de la definición el concepto de función.	6	10.7
Estudiantes que explican la función como relación de dos variables o incógnitas	8	14.2
Explican el concepto de función considerando la idea de ecuación matemática	10	17.9
Explicación totalmente desatinada respecto al concepto	9	16
Manifiestan no saber el concepto de función	1	1.8
No contestan la pregunta	12	21.4
Explicación de función considerando términos tales como puntos, conjuntos, rectas verticales, entre otras	10	17.9
Total	**56**	**99.9**

Fuente: Autor

CAPITULO 4.

Como producto del análisis de los resultados y la recogida del dato, a continuación reportaremos las siguientes conclusiones, una vez finalizada el procesamiento y articulación de toda la información que se deriva del capítulo 3.

4.1 CONCLUSIONES REFERIDAS AL ESTUDIANTE.

- En el aspecto estructural relativo a la determinación de la significación de los signos y símbolos y de las posibilidades de representación que ofrecen; menos del 50 % de los estudiantes mostraron dominio de estos aspectos para una mejor comprensión del concepto de función.
- Los estudiantes intentan dar explicaciones del concepto de función matemática, tomando en cuenta la teoría, con alguna visualización, para ello hacen uso de algún tipo de registro de representación figural, grafical o algebraico, pero aun así las respuestas dadas por ellos muestran que los estudiantes no se han apropiado satisfactoriamente del concepto de función tratado en clases.
- No logran haciendo uso de la representación verbal, o el lenguaje natural la conceptualización de lo que es una función matemática. Así mismo se evidencio en las respuestas dados por ello que no hacen uso de este tipo de representación para dar explicación que de claridad del dominio y apropiación del concepto.
- Se evidencia una falencia en la conversión de dos o más registros de representación, ya que al observar una actividad particular, diseñada con la intención de que se puedan articular y apoyar en diferentes registros de representación semiótica para dar una respuesta satisfactoria, se presentan confusiones que dé cuenta de una buena interpretación de lo planteado en la interrogante.
- Se observa que no tienen claridad acerca de las funciones que revisten mayor relevancia en su disciplina tales como lo son: Funciones Lineales, Funciones Cuadráticas, Función Exponencial y Logarítmica.
- La gran mayoría de los estudiantes son conscientes de le importancia de las funciones y sus distintas formas de representación en la resolución de problemas. Así como el rol que juegan dentro de las carreras económico administrativas dentro de su formación.

- La capacidad interpretativa es algo limitada ya que solo un estudiante logró articular los tres registros, como se pretendía; inexplicablemente, a pesar de la validez de sus razonamientos se "olvidaron" de alguno de los dos registros. En líneas generales, manejan hasta cierto punto la parte operacional y el poder dar respuesta al ejercicio con algún grado de efectividad.
- Partiendo de la consideración del libro texto como elemento de uso habitual en el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, el libro usado como texto para el curso de Calculo Diferencial es apropiado y es importante hacer énfasis en los estudiantes de utilizarlo con regularidad ya que brinda el acompañamiento necesario para fortalecer una apropiación correcta del concepto de función matemática y es de ayuda para una mejor comprensión de los distintos registros de representación.

4.2 CONCLUSIONES RESPECTO A LOS OBSTACULOS EPISTEMOLÓGÍCO DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN Y LAS CREENCIAS

Dentro de los obstáculos que se consideran de mayor incidencia en el desarrollo del concepto de función y que se pudo evidenciar en los grupos de estudiantes que hicieron parte de la muestra para esta investigación encontramos:

- ✓ Los estudiantes presentan el obstáculo de la concepción algebraica, ya que como se pudo observar en las respuestas 1, 2 y 3 del cuestionario no hay correspondencia clara entre el manejo de expresiones algebraica y ecuaciones.

- ✓ Los estudiantes presentan el obstáculo de concepción mecánica de una curva, ya que las respuestas a la pregunta 8 del cuestionario evidencia que no consideran el concepto de función matemática como un conjunto de puntos que satisfacen las condiciones de una relación funcional.

- ✓ La aplicación del cuestionario arrojó incoherencias en el desempeño. Estudiantes que realizaron correctamente algunas tareas, se quedaron cortos ante otras de naturaleza similar.

- ✓ En algunas respuestas, el acierto no alcanzó más del 30%. Lo que indica que el concepto de función es aún difuso entre los estudiantes.

- ✓ Las creencias en el estudio de conceptos matemáticos deben ser examinadas con el fin de eliminarse aquellas que se constituyan en una barrera epistemológica, es decir, es indispensable limpiarse el campo del saber antes de abonarlo con el conocimiento científico..

4.3 RECOMENDACIONES

1. Por ser el concepto de función uno de los más importantes en la historia de las matemáticas, merece toda su atención desde el punto de vista didáctico. Su utilidad como herramienta para la solución de problemas matemáticos y extra-matemáticos es evidente.
2. Es imperativo generar una pedagogía activa y de carácter analítico que lleve a los estudiantes a la necesidad de darle estructura lógica a sus procesos argumentativos.
3. Se hace necesario que los docentes responsables de orientar los conceptos matemáticos, incursionen en la historia y epistemología de las nociones que se involucra en los programas académicos. Con esto se abre un espacio y damos respuesta a muchas de las dificultades que presentan los estudiantes en cuanto a sus creencias y preconceptos matemáticos.
4. Es urgente afrontar los errores didácticos que persisten durante tantos años, donde se deben abordar con estrategias didácticas efectivas que fortalezcan la apropiación correcta del concepto de función matemática.
5. La enseñanza agradable de las matemáticas nos invita a crear una propuesta conceptual que nos lleve a una nueva visión de las matemáticas, a la altura de las necesidades del siglo XXI.
6. Los estudiantes de hoy, vivirán y trabajaran utilizando tabletas, computadoras, internet, calculadoras graficadoras, como herramientas de rutina y necesitan entrenarse en una matemática diferente a la de sus padres.
7. La reseña histórica del concepto de función puede ser utilizada como una herramienta pedagógica, que al mostrar los caminos recorridos, permita buscar nuevas alternativas, conjeturar mayores alcances y mejorar posibilidades para el desarrollo del proceso enseñanza/aprendizaje del concepto de función.

8. Las representaciones juegan un rol fundamental en los procesos de construcción de conceptos, por lo que son importantes en la enseñanza, aprendizaje y comunicación del conocimiento matemático de función. Se recomienda explorar que tipo de registros de representación son utilizados por los alumnos para incorporar o darle sentido al concepto de función. Esto servirá de apoyo para detectar elementos de juicio que puedan servir al docente para evaluar el conocimiento acerca de:

¿Cuáles son los distintos registros de representación puesto en juego por los estudiantes en la solución de cada problema?

¿Cómo aparecen y cuál es la necesidad de su conversión?

¿Cómo se coordinan en la actividad conceptual?

¿En qué medida la presentación del tema desde una situación problemática es beneficiosa para incorporar y darle sentido a la determinación de la función?

Como profesores de matemáticas, debemos prepararnos para entender las diversas necesidades de los estudiantes del concepto de función. Los estudiantes varían desde los de escasa preparación, con poco respaldo matemático y miedo a las matemáticas, hasta los que cuentan con una estupenda preparación y motivación. Para algunos este será su último curso de matemáticas, para otros es de preparación para futuros cursos de matemáticas. Hay que preparar la enseñanza/aprendizaje para ambos grupos de estudiantes.

4.4 REFLEXIÓN FINAL

- Para muchos de nosotros, para nuestros niños, y para nuestros jóvenes, las matemáticas fueron y son, una asignatura difícil y llena de sinsabores, aparentemente con poca aplicación en la vida diaria..
- Las matemáticas pueden cautivar a nuestras jóvenes estudiantes y ser motivo de gran diversión, si los profesores y los padres adoptan una visión renovada de los conceptos matemáticos y de la manera como se plantean estos en nuestras vidas.

- Al hacer un acercamiento al concepto de función por medio de modelos de situaciones reales cercanas a la cotidianidad, se torna consecuente con el desarrollo histórico y se convierte en un tema de interés y nos conduce a obtener una visión más amplia de las definiciones de función construidas en los últimos siglos.
- El desarrollo del concepto de función conduce a crear un ambiente propicio para su comprensión, su simbología, los diferentes lenguajes de representación, los registros semióticos, los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas, el desarrollo cognitivo, las pedagogías tradicionales, el papel de las creencias en la resolución de problemas y del concepto de función.

REFERENCIAS

Área, M. (1991). *Los medios, los profesores y el currículo*. Barcelona, España: Sendai.

Arya, J. Lardner, R. Ibarra, V. (2009) *Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la economía.* Editorial Prentice Hall. 5ta. Edición. México. p. 832.

Cockcroft, W. H. (1985). *Las matemáticas si cuentan (MEC, Trad).* Madrid, España: Ministerio de Educación y Ciencia. (trabajo original publicado en 1982).

Del Carmen, L. (1994). *Guía para el análisis de materiales curriculares.* El patio, 7, 7-9.

Duval. Raymond. (2004) *Semiosis y Pensamiento humano.* Universidad del Valle.

Editorial Alfaomega, México. p. 672.

Escudero, J.M (1983). *La investigación sobre medios de enseñanzas: revisión y perspectivas actuales.* Enseñanza, I, 87-119.

Flores, Pablo. (1998) *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Evolución durante las prácticas de enseñanza.* Editorial Comares. España.

García, F. (1995). *Guía para la evaluación de materiales curriculares impresos*. Aula de Innovación Educativa, 40-41, 77-80. España.

Gimeno, J. (1988). *El curriculum: una reflexión sobre la práctica*. Madrid, España: Morata.

Guzmán, I. (1998). *Registros de representación de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes*. Relime, Vol. 1, p. 5-21.

Hitt, F. (1996). *Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos.* Investigaciones en Matemática Educativa. Grupo Editorial Iberoamericana. México. Pp. 245-264

Kuhn Thomas S. (1962). La estructura de las revoluciones científicas. Universidad de Chicago. E.E.U.U.

Monterrubio, M.C. (2000). *Necesidad de conocer modelos de valoración de textos*. En L. Hernández y J. Rubio (EDS☺, Acta dl V Seminario Castellano-Leonés de Educación Matemática (pp. 161-166). Zamora, España: Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas.

Monterrubio, M.C. y Ortega T. (2011). *Diseño y Aplicación de instrumentos de análisis y valoración de textos escolares de matemática*. PNA, 513, 105-177. España.

Moreno, M.M y Azcarate, G.C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas, acerca de la enseñanza de las Ecuaciones diferenciales. Investigación Didáctica. Enseñanza de las Ciencias. N° 21 (2). Pp. 265-280. Barcelona, España.

Ortega, Tomás. (1996). *Modelos de valoración de textos matemáticos.* Números, 28, 4-12 Universidad de Valladolid. España.

Rechimont, E.E y Ascheri, M.E (2002). *Análisis de los registros de representación semiótica puestos en juego por alumnos en la resolución numérica de ecuaciones polinómicas.* Memorias del Tercer Congreso Internacional sobre Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora.

Rey, G. Sastre, P. Boubée, C. Cañibano, A. (2009). *Aportes didácticos para abordar el concepto de función.* Revista iberoamericana de Educación Matemática. Nº 20, p. 153-162.

Ruiz, Luisa. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico.* Universal de Jaén. p. 320.

Sastre Vásquez, P.; Rey, G. (2008). *El concepto de función a través de la historia. Unión.* Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 16, p. 141-155.

Santos, M.A: (1991). *¿Cómo evaluar los materiales?. Cuadernos de pedagogía,* 194, 29-31. España.

Sierpinska, A. y Lerman S. (1996). *Epistemologies of mathematics and of mathematics education.* In A.J. Bishop et al. (Eds.), International Handbook of Mathematics Education (pp. 827-876). Dordrecht, The Netherlands: Kluiwer A.P.

Stewart, James. (2008). *Cálculo.* Cengage Learning. México. Sexta edición, p. 763.

Thomas G.B. (1998). *Cálculo una variable*. 12 edición. Addison-Wesley. Mexico.

Thompson, A.G (1992). **Teacher beliefs and conceptions: a synthesis of the research**. In D.A Grows, (Ed), Handbook in mathematics teaching and learning. (pp. 127-146). New York. MacMillan.

Van Dormolen, J. (1986). *Textual analysis. En B Christiansen, A.G Howson y M. Otte (Eds.) Perspectives on mathematics education* (pp. 141-171). Dordrecht, Holanda: D. Recidel Publishing Company.

Villa, A., Callejo Ma. Luz (2005). *Matemáticas para aprender a pensar*. Narcea ediciones. Madrid. España, pp.220

WEBGRAFIA

diccionario.reverso.net/español-definiciones. (Recuperado 14 de octubre de 2014)

ANEXO

CUESTIONARIO SOBRE EL CONCEPTO DE FUNCIÓN

Nombre: ____

Edad: _______________ Semestre: _________________________

Programa: ____

Objetivo

Indagar sobre el conocimiento de los estudiantes de los programas de economía y administración sobre el concepto de función y su uso en la solución de problemas matemáticos.

Presentación

Apreciado estudiante con el propósito de proponer nuevas metodologías de enseñanza y aprendizaje del concepto de función le solicitamos que por favor realice la siguiente encuesta de manera responsable.

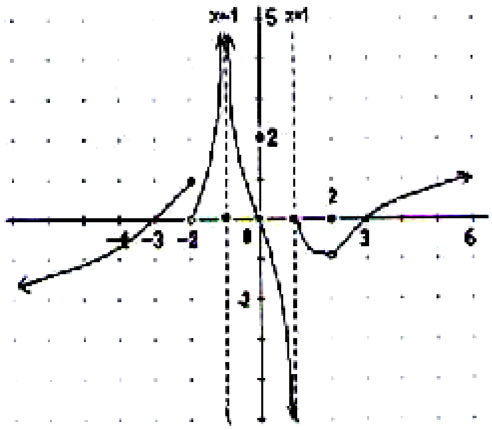
Esta encuesta no afectará las notas evaluativas que haya obtenido en el curso.

Su colaboración será un aporte valioso para continuar el estudio del concepto de función, que actualmente estoy desarrollando en el programa de Maestría de Educación Matemática de la U de M.

Preguntas

1. Si tuvieras que explicar qué es función matemática, a alguien que no lo sabe, ¿Cómo se lo explicarías para que lo entendiera fácilmente?
2. Escribe cuatro ejemplos de función matemática.
3. Escribe la función de ingreso que se da en el siguiente enunciado, de forma gráfica, algebraica y en tabla de valores: La empresa CARROS S.A. Acaba de introducir un nuevo modelo, el *turbo.* En esta ocasión el departamento de investigación de mercados estima que la Empresa puede vender 200 turbos al mes a $60, pero 120 al mes a $100. Se supone que la demanda es lineal.

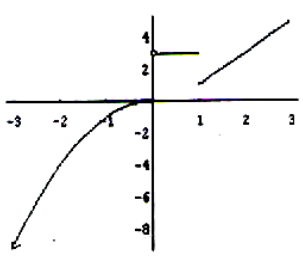
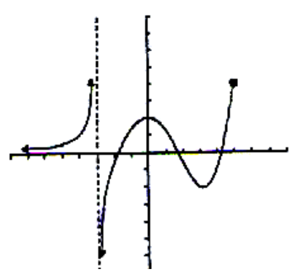
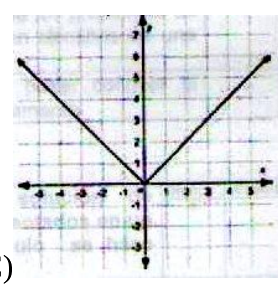
4. En el anterior ejemplo, escribe cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente.
5. ¿Qué se requiere para conocer el dominio de una función dada?
6. Construye una tabla de valores para las siguientes funciones.

a) 

b) La temperatura de un cuerpo que se calienta sube medio grado cada 2 minutos. A los 8 minutos el cuerpo tiene una temperatura de 22º centígrados.

c. $f(x) = \frac{2x}{x-1}$

7. Señala cuáles de los siguientes gráficos representan funciones.

a) 
b) 
C) 

8. ¿Cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son funciones? Márcalas con una x:

a) $y = 2x + 3$ **b)** $x^2 + y^2 = 4$ **c)** $f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in Q\ (racionales) \\ 1 & si\ x \in I\ (irracionales) \end{cases}$

d) $y = |x|$ **e)** $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} - 12 = 0$

9. El uso de las funciones en la solución de problemas de economía o administración se hace necesario para:

a) Calcular un valor.
b) Predecir un resultado.
c) Establecer una relación de las variables del problema.
d) Construir un gráfico

En cada una de las siguientes frases señala el número de 1 al 4 que consideres más adecuado.

10. En los enunciados de problemas de matemáticas que se resuelven en el curso de cálculo diferencial:	**Nunca**	**Esporádicamente**	**Frecuentemente**	**Siempre**
	1	**2**	**3**	**4**
Hay expresiones algebraicas que representan funciones.				
El fácil reconocer la función que se va a estudiar.				
Hay gráficos que representan funciones.				
Los enunciados de los problemas se pueden escribir en términos de una función.				
Hay datos para poder conocer la función algebraicamente.				

11.Para la solución de problemas presentados en un curso de cálculo se hace uso de:	**Nunca**	**Esporádicamente**	**Frecuentemente**	**Siempre**
	1	**2**	**3**	**4**
Funciones representadas gráficamente.				
Funciones dadas verbalmente.				
Funciones presentadas algebraicamente.				
Funciones dadas numéricamente (en tabla de datos).				

12.Usted resuelve problemas de cálculo donde le den la función:	**Nunca**	**Esporádicamente**	**Frecuentemente**	**Siempre**
	1	**2**	**3**	**4**
Representada gráficamente.				
Dada verbalmente.				
Algebraicamente.				
Funciones dadas numéricamente (en tabla de datos)				

13.Las funciones que normalmente se usan para resolver problemas del cálculo, son:	**Nunca**	**Esporádicamente**	**Frecuentemente**	**Siempre**
	1	**2**	**3**	**4**
Constantes				
Lineales				
Cuadráticas				
Polinómicas				
Racionales				
Exponenciales y logarítmicas				
Trigonométricas y sus inversas				
Raíces (Raíz cuadrada, cúbica, etc.)				
Funciones hiperbólicas				
Funciones por tramos				

14. Marca con una cruz las tres palabras que se relacionen con mayor frecuencia con las funciones matemáticas.

- ☐ Reglas ☐ Métodos ☐ Imaginación ☐ Exactitud
- ☐ Razonamiento ☐ Sentido común ☐ Modelo

15. Marca con una cruz las tres expresiones o palabras que se relacionen con mayor frecuencia con el uso de función en la solución de problemas.

- ☐ Modelar ☐ Predecir valores ☐ Explicar situaciones
- ☐ Investigar ☐ Relacionar variables ☐ Practicar algoritmos
- ☐ Aplicar algoritmo